EXERCICES : DÉRIVÉ ET PRIMITIVES

Exercice 1 : Etude d'une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2+1}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

1. On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.
   - **a.** Étudiez le sens de variation de g et montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont vous donnerez un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
   - **b.** Précisez le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
2. - **a.** Étudiez les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   - **b.** Calculez $f'(x)$ et dressez le tableau de variation de f.
3. - **a.** Montrez qu'il existe quatre réels a, b, c, et d tels que
   $$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$$
   - **b.** Déduisez en que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ et étudiez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
     Vérifiez en particulier que $\mathscr{C}$ rencontre Δ en un unique point Δ.
4. Déterminez les abscisses des point B et B' de $\mathscr{C}$ admettant une tangente parallèle à Δ. [a]
5. - **a.** Vérifiez que $f(\alpha) = \dfrac{3\alpha}{2}$. Déduisez en une valeur approchée de $f(\alpha)$. [b]
   - **b.** Tracez Δ, $\mathscr{C}$ ainsi que les points A, B, B' et M, N, P d'abscisses respectives 1, 2 et -1, sans oublier les six tangentes en ces points.

---

a. deux droites parallèles ont le même coefficient directeur...
b. utilisez le fait que $g(\alpha) = 0$.

Exercice 2 :

Déterminer les primitives sur I de chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto 3x^2 - 2x + 2$, $I = \mathbb{R}$
2. $g : x \mapsto x + 2 + \dfrac{1}{x^3}$, $I = \mathbb{R}^{+*}$
3. $h : x \mapsto \dfrac{3x^2+4x-2}{x^4}$, $I = \mathbb{R}^{+*}$
4. $k : x \mapsto -3(-3x-2)^2$, $I = \mathbb{R}$
5. $l : x \mapsto \dfrac{x+1}{(x^2+2x-3)^2}$, $I =]1;+\infty[$
6. $m : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{-2x+4}}$, $I =]-\infty;2[$

Exercice 3 :

Déterminer la primitive F de f sur I vérifiant la condition indiquée.

1. $f : x \mapsto 4x^2 - 3x + 2$, $I = \mathbb{R}$ et $F(-1) = 0$
2. $f : x \mapsto 3x + 1 + \dfrac{1}{x^2}$, $I = \mathbb{R}^{-*}$ et $F(-2) = 1$
3. $f : x \mapsto (2x+1)^3$, $I = \mathbb{R}$ et $F(0) = 1$
4. $f : x \mapsto \cos 3x$, $I = \mathbb{R}$ et $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

Exercice 4 : Equation Fonctionnelle

Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue est une fonction. Nous en étudierons bientôt deux exemplaires en cours :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y) \qquad \text{et} \qquad f(xy) = f(x) + f(y)$$

Pour l'heure, nous allons nous contenter de rechercher les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Les deux parties sont indépendantes.

PARTIE A

1. Montrez que pour tout entier naturel n, $f(n) = n \times f(1)$
2. Montrez que pour tout entier naturel non nul p, $f(1) = p \times f(1/p)$.
3. Montrez que pour tout entier naturel non nul p, $f(1) = p \times f(1/p)$.
4. Déduisez-en que pour tout rationnel r, $f(r) = r \times f(1)$

PARTIE B

On suppose que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = a$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)/x$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = a$.

1. Calculez $f(0)$.
2. Montrez que g est continue en 0.
3. Montrez que $g(2x) = g(x)$ pour tout réel x.
4. Déduisez-en que $g(x) = g(x/2^n)$ pour tout réel x et tout entier naturel n.
5. Déduisez-en que g est une fonction constante.[a]
6. Déduisez-en une expression de $f(x)$ pour tout réel x en fonction de a.
7. Réciproquement, vérifiez que les fonctions trouvées à la question 5) sont solutions du problème. Concluez. Comparez avec les résultats de la partie A.

---

a. Où on utilise un théorème du cours sur la continuité