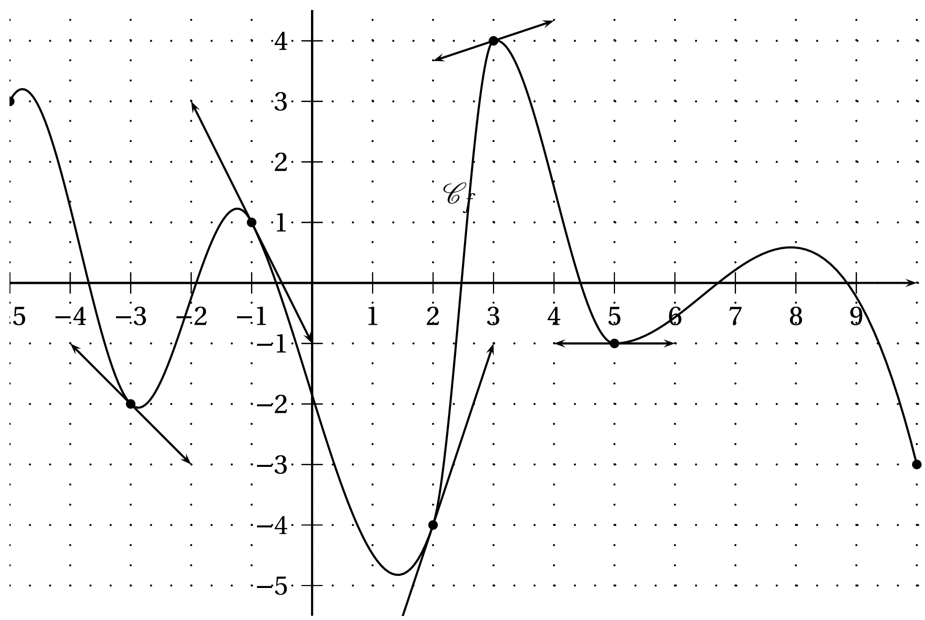
Exercices : Dérivé et Primitives

Exercice 1. La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.

1. Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$$f'(-3) \qquad f'(-1) \qquad f'(2) \qquad f'(3) \qquad f'(5)$$

2. Donner un encadrement de $f'(x)$ sur $[2;3]$.



Exercice 2.

1. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse a à la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 - 4x + 5$.
2. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 3 à $\mathscr{P}$.
3. En quels point de $\mathscr{P}$ peut-on mener une tangente issue de l'origine ? Vérifier sur un dessin.

Exercice 3.

1. Justifier, pour x voisin de 0, chacune des approximations suivantes :

$$(1+x)^3 \simeq 1+3x \qquad \sqrt{1+x} \simeq 1+\frac{x}{2} \qquad \frac{1}{1+x} \simeq 1-x \qquad \sin x \simeq x \qquad \cos x \simeq 1$$

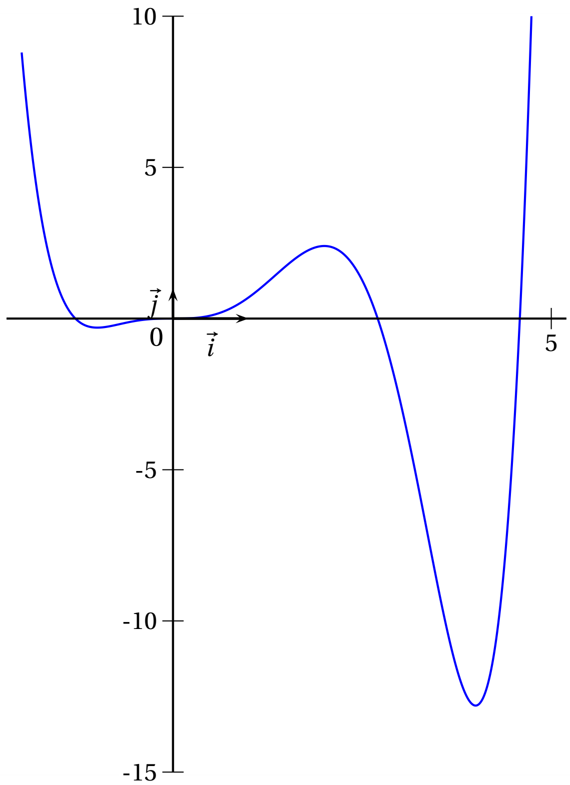
2. En déduire, sans calculatrice, une valeur approchée des nombres suivants :

$$A = 1{,}005^3 \qquad B = \sqrt{1{,}0002} \qquad C = \sqrt{0{,}996} \qquad D = \frac{1}{0{,}997} \qquad E = \frac{1}{1{,}0007} \qquad F = \sin(-0{,}01) \qquad G = \cos 0{,}02$$

Exercice 4. La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction

$$f : x \longmapsto 0,05(x^6 - 6x^5 + 3x^4 + 16x^3)$$

1. Lire graphiquement le signe de $f'(x)$ sur $[-2;5]$
2. Préciser en quels points f admet un extremum relatif.



Exercice 5. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable, puis étudier les variations de f.

1. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 1$
2. $f(x) = x^2(x-1)^3$
3. $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+1}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$
5. $f(x) = 3 - \cos^2 x$ sur $[0;\pi]$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ sur $]0;\pi[$
7. $f(x) = x - 9\sqrt{x}$
8. $f(x) = \sqrt{x}(x-1)$

Exercice 6. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée :

1. $f(x) = \cos x^2$
2. $f(x) = \cos(\cos x)$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$
4. $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$
5. $f(x) = \sqrt{5 + \sin x}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 7. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{x} - \dfrac{3}{16}x^2$.

1. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 4.
2. Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.
On vérifiera la situation correspondante sur sa calculatrice.

Exercice 8. Etudier le signe de $30x^3+19x^2-1$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 9. On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}-\{-2;0\}$ par

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2} \qquad \text{et} \qquad g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}$$

1. Etudier les limites de f et de g aux bornes de leur ensemble de définition. En déduire que les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont les mêmes asymptotes.
2. Etudier les variations des fonctions f et g.
3. Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente en $\Omega(-1;0)$, et les positions respectives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. Représenter $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$
5. Montrer que Ω est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$ et $(\Omega,\vec{j})$ axe de symétrie de $\mathscr{C}_g$

Exercice 10. On considère la fonction

$$f = x \longmapsto x+\sqrt{x^2+1}$$

1. Vérifier que f est définie sur $D=]-\infty,-1[\cup[1;+\infty[$ et montrer que pour tout $x\in D$:

$$f(x)f(-x)=-1 \tag{1}$$

2. Etudier la limite de f en $+\infty$, puis déduire de (1) celle de f en $-\infty$.
3. Montrer que la droite Δ, d'équation $y=2x$, est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$. On pourra à nouveau utiliser (1).
4. Etudier la dérivabilité de f en 1 et en -1.
5. Tracer $\mathscr{C}_f$ et Δ

Exercice 11. La fonction exponentielle [1]

De nombreux phénomènes d'évolution sont modélisés par une fonction dérivable f dont *la dérivée f' est proportionnelle à la fonction f elle-même*. Nous allons observer l'une d'entre elles par la méthode d'Euler.
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0)=1$ et pour tout x on a $f'(x)=f(x)$

1. Montrer que, $\forall\, a,h$ (h voisin de zéro), l'approximation affine donnée par le calcul des dérivées s'écrit :

$$f(a+h)\simeq f(a)(1+h)$$

2. En déduire que, si l'on part de $f(a)$, la suite des valeurs approchées de $f(x)$ obtenus par la méthode d'Euler [2], avec le pas h, est une suite géométrique. Quelle est sa raison ?
3. Déduire de la question 2. que $f(1)\simeq\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ pour les grandes valeurs de n. Donner la valeur approchée de $f(1)$ correspondant à $n=10000$.
4. Tracer une approximation de la courbe $\mathscr{C}_f$

1. La fonction f, appelée exponentielle sera étudiée ultérieurement
2. C'est-à-dire grâce à l'approximation $f(a+h)\simeq f(a)+f'(a)h$ on obtient une valeur approchée de $f(x)$ pour certains x afin de construire la courbe $\mathscr{C}_f$ de façon approchée.

Exercice 12. La fonction logarithme népérien

Soit f une fonction vérifiant $f(1)=0$ et pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

1. Calculer une valeur approchée de $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ et $f(6)$.
2. Construire une approximation de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[1;6]$.

Exercice 13. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{x^3-4}{x^2+1}$$

et on note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal (unité : 1 cm).

1. ***Etude d'une fonction auxiliaire*** g ***où*** $g(x)=x^3+3x+8$
   a. Etudier le sens de variation de g, et montrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude $0,1$.
   b. Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
2. **a.** Calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f.
   b. Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis dresser le tableau de variations de f.
3. **a.** Montrer qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2+1}$
   b. En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ, et étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ. Vérifier en particulier que $\mathscr{C}_f$ rencontre Δ en un unique point de A.
4. Déterminer les abscisses des points B et B' de $\mathscr{C}_f$ admettant une tangente parallèle à Δ.
5. **a.** Vérifier que $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$; en déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$.
   b. Tracer Δ et $\mathscr{C}_f$ en plaçant les points A, B et B', ainsi que les points I, J et K d'abscisses respectives 1, 2, et -1 avec leurs tangentes.

Exercice 14. Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I=[0;1]$ telles que $f(0)=g(0)$ et $f'\leq g'$ sur I. Démontrer que $f\leq g$ sur I (On pourra étudier les variations de $g-f$)