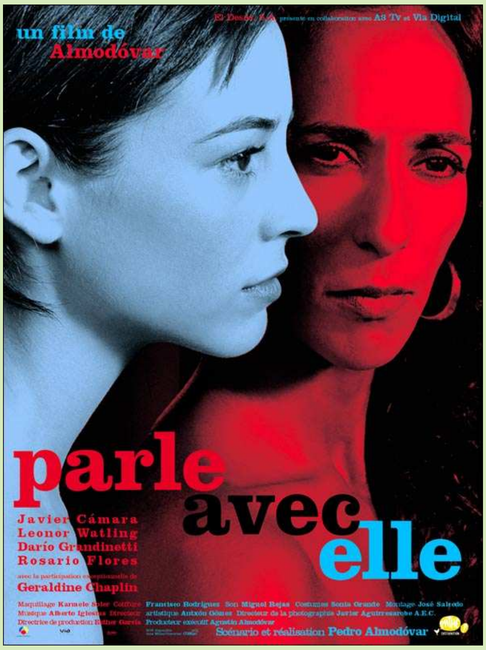
Chapitre 4

Dérivées et Primitives

Hors Sujet



Titre : « Parle avec elle »

Auteur : Pedro Almodovar

Présentation succinte de l'auteur : Pedro Almodóvar Caballero est né en 1949 en Espagne. Vers 16 ans il quitte sa maison pour s'installer à Madrid, sans argent et sans travail, mais avec un projet très concret : étudier le cinéma et en faire son métier. Il lui est impossible de s'inscrire à l'école officielle du cinéma puisqu'elle vient de fermer. Dans la mesure où il ne peut apprendre le langage cinématographique, Almodóvar décide d'en apprendre le fond en multipliant ses expériences artistiques personnelles dans différents domaines. Malgré la dictature, Madrid représente, pour un adolescent provincial, la culture, l'indépendance et la liberté. Il fait de nombreux petits boulots et s'achète sa première caméra super 8 après avoir décroché un emploi à la Compagnie nationale de téléphone d'Espagne. Il y travaille douze ans comme employé de bureau. Le matin, à la Compagnie de téléphone, il apprend à connaître la classe moyenne espagnole qui vit les débuts de la société de consommation, avec ses grands drames et ses petites misères. Le soir et la nuit, il écrit, fait du théâtre et tourne des films en super 8. Il collabore à diverses revues underground, écrit des nouvelles dont certaines sont publiées. Il a aussi réalisé des romans-photo au cours de sa jeunesse, fait partie d'une troupe de théâtre amateur (référence à cette période dans Tout sur ma mère) et d'un groupe punk-rock avant de commencer sa carrière cinématographique.

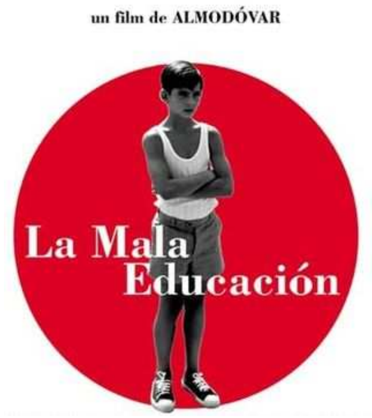
Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »

THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

LEÇON 4



Dérivées et Primitives

Résumé

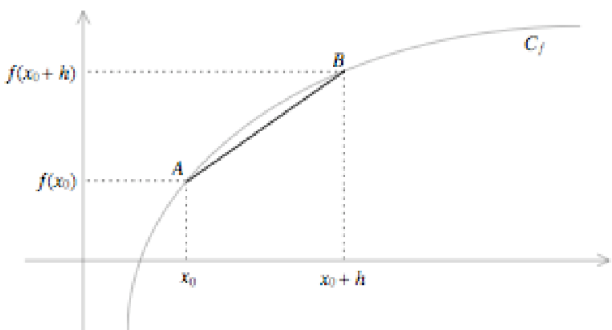
Les notions de continuité et de dérivabilité, et par suite d'intégration sont apparus tardivement dans l'histoire des mathématiques ($XVII^{\text{ème}}$ siècle) et ont permis de résoudre de nombreux problèmes auxquels les méthodes classiques n'offraient pas de solution générale comme le calcul de la vitesse instantanée, la recherche de trajectoire d'un objet en mouvement, le calcul de la longueur de la trajectoire d'une planète, le calcul de l'aire limitée par des courbes, ... Ce n'est qu'au siècle dernier que les mathématiciens ont travaillé avec rigueur en utilisant ces nouveaux objets, en effet ils se sont longtemps contentés d'utiliser des définitions intuitives.
La résolution de ces problèmes permit l'éclosion de démarches originales qui donnèrent naissance, au début du $XVIII^e$ siècle à une nouvelle forme de calcul le calcul infinitésimal. On peut considérer que les deux fondateurs de ce calcul sont le mathématicien anglais Newton et le philosophe allemand Leibniz, mais de manière indépendante. Ils ont notamment mis en évidence le fait que le problème des tangentes et le calcul des aires sont des problèmes inverses.

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Les intervalles considérés sont non vides et non réduits à un point.

I) Dérivée d'une fonction en un point

I-1 Définition

Travail de l'élève **1.** Le graphique ci-dessous représente le nombre de kilomètres parcourus par une automobile en fonction du temps en heure.
On appelle f la fonction distance ainsi définie sur un intervalle de temps I et C_f sa courbe représentative.
On s'intéresse à la vitesse du véhicule à partir du temps $x_0 \in I$ pendant une période h.



1. Que vaut la vitesse moyenne de la voiture sur l'intervalle de temps $[x_0; x_0+h]$?

2. Que représente graphiquement cette quantité par rapport la sécante à la courbe C_f aux points d'abscisses x_0 et $x_0 + h$?
   Cette quantité s'appelle l'accroissement moyen, ou encore le taux d'accroissement de la fonction f.
3. Proposer une méthode pour avoir la vitesse instantanée du véhicule au temps x_0.
4. Que représente graphiquement cette quantité ?
5. Que représente pour la fonction f cette quantité ?

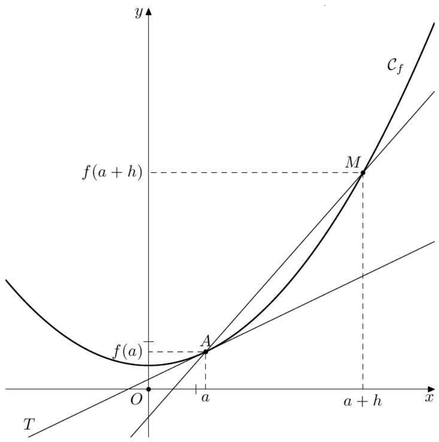
Définition 1 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I.
On dit que f est dérivable en a lorsque le taux d'accroissement de f en a admet une limite ℓ en a i.e :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$$

Dans ce cas, ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a, et on le note $f'(a)$.

Remarque : La quantité $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (ou $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$) s'appelle le taux d'accroissement de f en a. Graphiquement elle représente le coefficient directeur de la sécante à la courbe $\mathscr{C}_f$ entre les points d'abscisses a et $a+h$



Exemples :

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Etudions sa dérivabilité en 0.
   Pour cela on calcule le taux d'accroissement entre 0 et $0+h$:
   $$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h^2+2h+1-1}{h} = h+2$$
   La limite de ce taux d'accroissement lorsque h tend vers 0 est é, par conséquent f est dérivable en 0 et $f'(1) = 2$.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x}$. Etudions sa dérivabilité en 0.
   Pour cela on calcule le taux d'accroissement entre 0 et $0+h$:
   $$\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}-0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$
   La limite de ce taux d'accroissement lorsque h tend vers 0^+ est $+\infty$, par conséquent g n'est pas dérivable en 0.

Exemple :

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x|$. Etudions sa dérivabilité en 0.
Pour cela on calcule le taux d'accroissement entre 0 et $0+h$:

$$\frac{h(0+h)-h(0)}{h} = \frac{|h|-0}{h} = \frac{|h|}{h}$$

Lorsque $h<0$ ce taux d'accroissement vaut -1 et sa limite lorsque h tend vers 0^- est -1.
En revanche si $h \geq 0$, ce taux d'accroissement vaut 1 et sa limite lorsque h tend vers 0^+ est 1, par conséquent la limite à droite n'est pas égale à la limite à gauche et donc g n'est pas dérivable en 0.

I-2 Différentes interprétations

I-2.1 Interprétation numérique et approximation affine

Lorsque f est dérivable en a, nous pouvons écrire :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + \Phi(h) \qquad \text{où } \Phi(h) \text{ représente un terme tel que } \lim_{h\to 0} \Phi(h) = 0$$

Ce qui équivaut à dire : $f(a+h)-f(a) = hf'(a) + h\Phi(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\Phi(h) = 0$.
Ainsi,

$$\lim_{h\to 0} f(a+h)-f(a) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{h\to a} f(a+h) = f(a)$$

d'où f est continue en a.
Donc toute fonction dérivable en a est continue en a. La réciproque est fausse !

De plus, $h\Phi(h)$ tend vers 0 très vite quand h tend vers 0, d'où l'approximation $f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h$, appelée approximation affine de part son type.

Exemple :

Pour la fonction cube $f(x) = x^3$, de dérivée $f'(x) = 3x^2$, son approximation affine en 1 est $(1+h)^3 \simeq 1^3 + 3 \times 1^2 \times h$.
D'où $(1+h)^3 \simeq 1+h$.

Remarque : Cela a une utilité non négligeable pour optimiser les calculs.

I-2.2 Notation différentielle

Une petite variation h de x, notée par les physiciens Δx, provoque une petite variation de $f(x+h)-f(x)$, notée Δy. Avec ces notations, on a alors :

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x \Phi(\Delta x) \qquad \text{avec } \lim_{\Delta x \to 0} \Phi(\Delta x) = 0$$

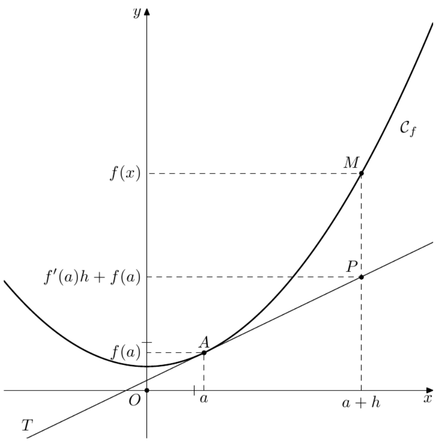
Et l'approximation $\Delta y \simeq f'(x)\Delta x$. Nous noterons symboliquement cela ainsi : $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ ou encore $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$.
C'est la notation différentielle.

I-2.3 Interprétation graphique : Tangente

Lorsque f est dérivable en a, la représentation graphique de f admet au point $A(a; f(a))$ une tangente T_a de coefficient directeur $f'(a)$.
Cette tangente a pour équation

$$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

En effet, soit $M(x; y)$ un point quelconque de T_a différent de A. On sait que le coefficient directeur $f'(a)$ de (AM) vaut $\dfrac{y-f(a)}{x-a}$. Ce qui équivaut à $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$



Remarque : On constate que l'équation de la tangente n'est autre que l'approximation affine de f en a (en posant $x = a + h$).

Exemple :
On donne

$$f(x) = -x^2 + 3$$

Donner l'équation de la tangente T au point d'abscisse $a = 2$.

I-2.4 Interprétation cinématique : Vitesse

Supposons ici que f représente la loi horaire d'un mobile en déplacement. La vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est alors :

$$\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$$

La vitesse instantanée du mobile au moment t_0 est donc donnée par :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} = f'(t_0)$$

Remarque : Sur le même principe, en dérivant une seconde fois, on obtient l'accélération du mobile.

II) Fonction dérivée : rappels

II-1 Définition

Définition 2 :
Lorsqu'une fonction f admet un nombre dérivé en tout point a d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I. On définit alors la fonction dérivée, notée f', qui à tout point a de I associe le nombre dérivé $f'(a)$.

Remarque : Nous savons déjà dériver un certain nombre de fonctions. Se reporter au tableau des dérivées pour en avoir un aperçu.
On sait également que la somme et le produit de fonctions dérivables (sur un intervalle I) est dérivable (sur I). De même pour le quotient $\frac{f}{g}$ de deux fonctions dérivables où g ne s'annule pas sur I. On montrera également que les fonctions du type $x \longmapsto x^n (n \in \mathbb{N})$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et les fonctions rationnelles le sont sur tout intervalle contenu dans leur ensemble de définition.

Théorème 1 :
Toute fonction f dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Remarque :

1. On a déjà démontré ce théorème au début de cette leçon.
2. La réciproque est fausse. Par exemple la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ et non dérivable en 0.
3. Une fonction f peut être dérivable (et donc continue) sans que sa dérivée f' soit continue :
   Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0 \text{ si } x = 0$$
   Montrons que f est continue en 0 :
   Nous avons, pour tout réel $x \neq 0$: $\quad |\sin\frac{1}{x}| \leq 1$
   donc, pour tout réel $x \neq 0$: $\quad x^2 |\sin\frac{1}{x}| \leq x^2$
   D'après le théorème de comparaison des limites (en 0), on en déduit :
   $$\lim_{x\to 0} |f(x)| = 0$$
   Au final :
   $$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$
   Ce qui prouve que f est continue en 0.
   Montrons que f est dérivable en 0 :
   Pour tout réel $x \neq 0$, nous avons : $\quad \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x\sin\frac{1}{x}$
   Or :
   $$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$
   (on le prouve de la même manière que ci-dessous en écrivant $|x\sin\frac{1}{x}| \leq |x|$)
   Donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

Cependant f' n'est pas continue en 0. En effet, pour tout $x \neq 0$, on a :

$$f'(x) = 2x \times \sin\frac{1}{x} + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

Nous savons que $\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} = 0$, en revanche la quantité $\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0, donc f' n'a pas de limite en 0 et n'est donc pas continue en 0 ! ! !

II-2 Tableaux des fonctions dérivées vues en première

Fonction f	**Fonction f'**	**Domaine de définition de f'**
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$ (a et b réels)	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ sinon
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} - \{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$

Tous les résultats de ce tableau se démontrent essentiellement avec la définition du nombre dérivé.

Preuve

Voici un exemple de démonstration d'une des lignes de ce tableau :

Cas 1 : $f(x) = \sin x$

Le taux d'accroissement de f en x s'écrit :

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\sin h}{h} \cos x$$

Or :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

et donc :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x$$

Opération sur les dérivées **lorsque u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I**		
Fonction	**Dérivée**	**Conditions**
$u+v$	$u'+v'$	
ku (k constante)	ku'	
uv	$u'v+uv'$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I

Tous les résultats de ce tableau se démontrent essentiellement avec la définition du nombre dérivé.

Preuve

Voici un exemple de démonstration d'une des lignes de ce tableau : Montrons que

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Pour tout $x \in I$ notons $f(x) = \dfrac{1}{v(x)}$ et etudions le taux d'accroissement entre x et $x+h$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{1}{v(x+h)} - \dfrac{1}{v(x)}}{h} = \frac{v(x)-v(x+h)}{hv(x)v(x+h)} = -\frac{v(x+h)-v(x)}{h} \times \frac{1}{v(x)v(x+h)}$$

Or comme v est dérivable, on a :

$$v'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

Par conséquent :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{v(x+h)-v(x)}{h} \times \frac{1}{v(x)v(x+h)} = -v'(x) \times \frac{1}{v^2(x)}$$

Donc f est dérivable et $f' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

Exercice 1 :

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $g(x) = \dfrac{x^2+2}{5x+1}$
2. $f(x) = x^2 \cos x$
3. $h(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-2}$
4. $k(x) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{25-x^2}{\cos x}$

II-3 Applications de la dérivation à l'étude de fonction

II-3.1 Variations d'une fonction

Bien qu'intuitivement évident, on admettra le théorème suivant. (Sa démonstration découle en partie du théorème des accroissements finis qui est hors-programme. Ce théorème découle lui-même du théorème de Rolle dont la démonstration repose sur le fait qu'une fonction continue sur un intervalle borné est bornée et atteint ses bornes. Or, cette dernière propriété repose en partie sur le théorème de Bolzano-Weierstrass dont la démonstration ne peut se comprendre qu'après avoir établi un certain nombre d'éléments de topologie de la droite réelle...)

Théorème 2 : *Lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.
2. f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur I.
3. f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si $f' > 0$ (resp $f' < 0$), sauf peut-être en des points isolés où elle s'annule.

Remarque : Ainsi, l'étude des variations d'une fonction dérivable se ramène à la recherche des intervalles sur lesquels la dérivée f' conserve un signe constant.

Exemple :

Etudions les variations de la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 6x^2 + 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

Par conséquent on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	1	$\searrow$	-31	$\nearrow$	

Exemple :

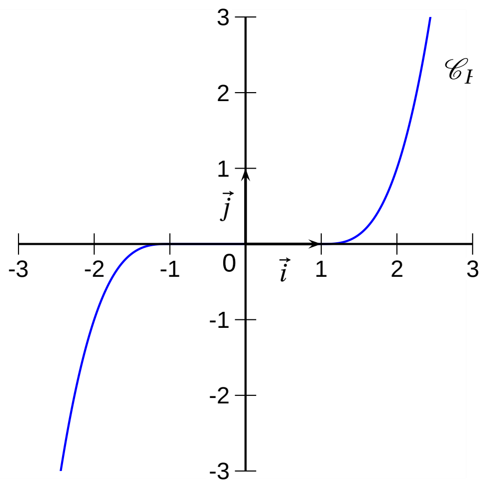
On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x \in [-1;1] \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On a :

$$g'(x) = \begin{cases} 3(x+1)^2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x \in [-1;1] \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La dérivée est donc toujours positive ou nulle, par conséquent la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$ mais non strictement car sa dérivée s'annule sur un intervalle.



II-3.2 Extremums d'une fonction

Corollaire 1 : Condition nécessaire

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si f admet un extremum local en un point x_0 intérieur à I alors $f'(x_0) = 0$

Remarque :

– Si a et b sont les extrémités de l'intervalle I (extrémités pouvant valoir $\pm\infty$) alors l'interieur de I est l'intervalle ouvert $]a;b[$ i.e l'interieur de I est le plus grand intervalle ouvert contenu dans I. Pour que le théorème s'applique x_0 doit appartenir à $]a;b[$.

– Un extremum local est soit un maximum local, soit un minimum local. Une fonction f admet un maximum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J du type $]x_0-\epsilon;x_0+\epsilon[$ (avec $\epsilon>0$) tel que pour tout x de J on ait $f(x)\leq f(x_0)$. (On définit de façon analogue un minimum local). Une fonction peut avoir plusieurs maxima sur un même intervalle I. Le plus grand d'entre eux est appelé maximum global de f sur I.

– Dans la pratique, les extrémums locaux sont aisément repérables sur le tableau de variations : ils correspondent aux changements de sens de flèches. Ainsi la fonction de l'exemple de la partie précédente la fonction f admet un maximum local en 0 et un minimum local en 4.

Preuve

Par hypothèse, f est dérivable en x_0 et :

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Comme x_0 est intérieur à I, il existe $\epsilon>0$ tel que $]x_0-\epsilon;x_0+\epsilon[$ soit contenu dans I.

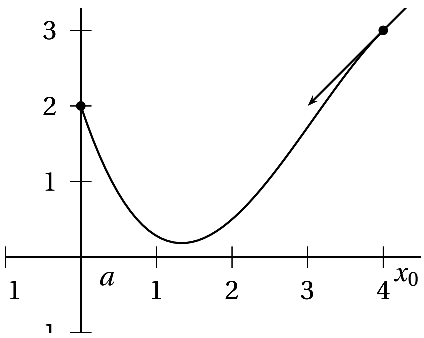
Supposons que l'extremum local de f soit un maximum local :

Pour $h\in]0;\epsilon[$, on a : $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leq 0$

Pour $h\in]-\epsilon;0[$, on a : $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0$

Ceci montre que la dérivée à droite de f en x_0 est négative et que la dérivée à gauche de f en x_0 est positive. Et comme elles sont toutes deux égales à $f'(x_0)$, on a nécessairement $f'(x_0)\leq 0$ et $f'(x_0)\geq 0$ d'où $f'(x_0)=0$. Dans le cas où f admet un minimum local, on raisonne de même.

Remarque : Si x_0 est une extrémité de I, la fonction f peut avoir un extremum en x_0 sans nécessairement avoir $f'(x_0)=0$. C'est ce qu'illustre la figure suivante :



Théorème 3 : *Condition suffisante*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit x_0 un point intérieur à I.

Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f a un extremum local en x_0.

Remarque : Nous admettrons ce théorème dont la démonstration repose, là encore, sur le théorème des accroissements finis. Les trois théorèmes précédents sont largement exploités dans les exercices notamment lors de la mise en place du tableau de variation d'une fonction.

II-4 Plan d'étude de fonction

1. Ensemble de définition
2. Ensemble d'étude, propriétés géométriques de la courbe (certaines propriétés, telles que parité ou périodicité, peuvent permettre de réduire l'ensemble sur lequel on étudie la fonction)
3. Limites aux bornes de l'ensemble d'étude.
4. Dérivabilité, variations
   – On calcule la dérivée de la fonction sur les intervalles où elle existe

   – Son signe fournit le sens de variation.
5. Branches infinies (éventuellement)
6. Représentation graphique avec quelques points et tangentes remarquables
7. Contrôle de certaines propriétés suggérées par la figure, comme la présence d'un élément de symétrie.

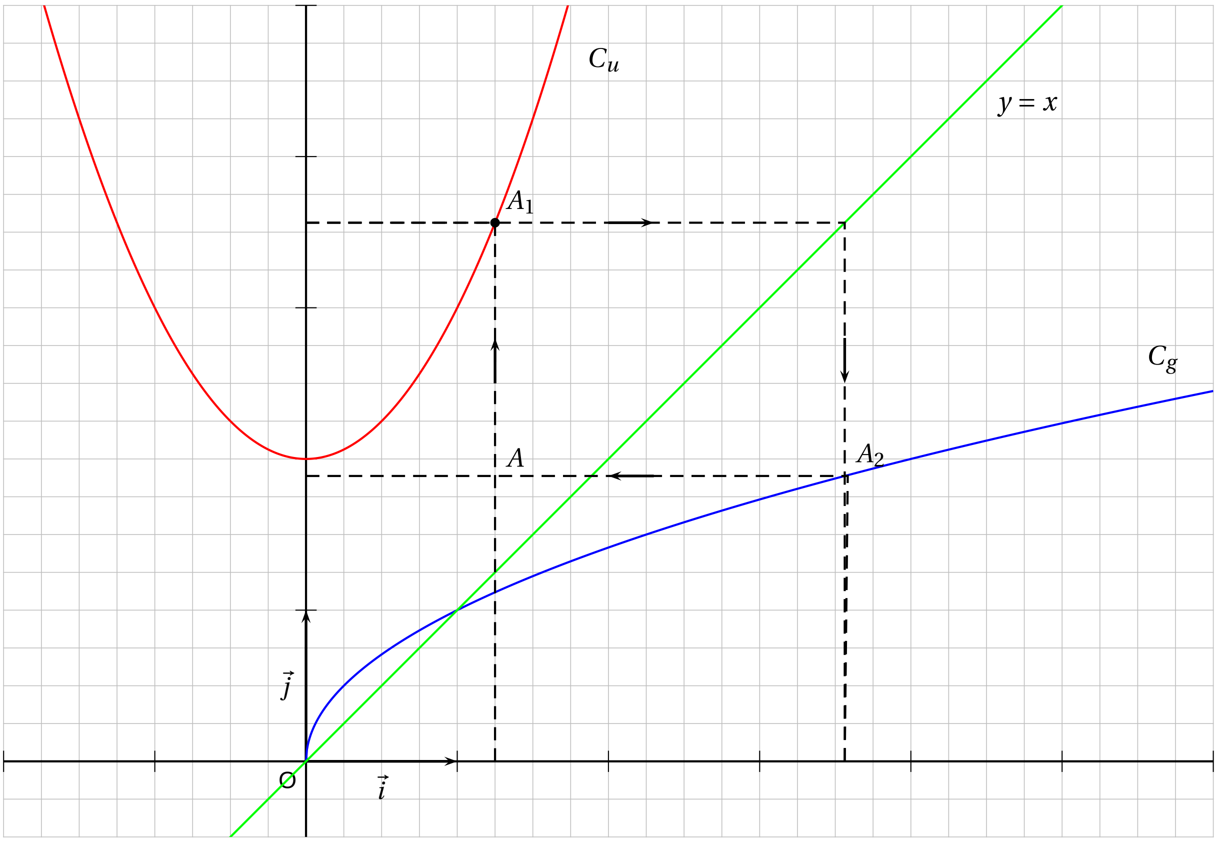
Exemple :
Etudier et représenter graphiquement la fonction f en prenant appui sur le plan d'étude donné précédemment :

1. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 10$
2. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$
3. $f(x) = x - 3 + \dfrac{2}{x+1}$
4. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$

III) Dérivée d'une fonction composée et applications

III-1 Théorème des fonctions composées

Travail de l'élève **2.** On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2+2$ et $\mathscr{C}_u$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x}$ et $\mathscr{C}_g$ est sa courbe représentative dans le même repère que $\mathscr{C}_f$.



1. **a.** Déterminer les fonctions composées $f = g \circ u$ et $h = u \circ g$ en précisant leur ensemble de définition.
Dans le reste de l'activité, on cherche à établir si f est dérivable et si oui, quelle est sa fonction dérivée.

b. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère considéré.
Sur le graphique ci-dessous, on a construit les courbes $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_g$.
A partir du point A_1 d'abscisse a de la courbe $\mathscr{C}_u$, on construit successivement le point A_2 de la courbe $\mathscr{C}_g$ et le point A comme l'indique la figure.
Donner les coordonnées des points A_1, A_2 et A en fonction de a, u, g et/ou f.
En déduire que A est un point de la courbe $\mathscr{C}$.

c. En utilisant le procédé de construction décrit précédemment et en prenant d'autres points de départ sur $\mathscr{C}_u$, donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.
La fonction f semble-t-elle dérivable ?

2. Soit x un réel voisin de a, M_1 le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$ et M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$.

a. Démontrer que le coefficient directeur de la droite (AM) est : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{a^2+2}}$

b. En déduire que f est dérivable en a et que l'on a $f'(a) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+2}}$.

3. On désigne par $\mathscr{D}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_u$ en A_1 et par Δ la tangente à la courbe en $\mathscr{C}_g$ en A_2.

a. Déterminer les fonctions affines u_1 et g_1 représentées respectivement par les droites $\mathscr{D}$ et Δ.

b. Déterminer la fonction $f_1 = g_1 \circ u_1$ et vérifier que la droite $\mathscr{T}$, représentant cette fonction passe par A et a pour coefficient directeur $f'(a)$.

c. Que peut-on dire de la droite $\mathscr{T}$ pour la courbe $\mathscr{C}$?

Théorème 4 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$.

La fonction composée $f \circ g$ est dérivable sur I et

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

Preuve

Soit $x_0 \in I$. On se place dans le cas où $g(x) \neq g(x_0)$ au voisinage de x_0.

On écrit :

$$\frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \times \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

On pourra remarquer la notation différentielle très simple : $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{dg} \times \dfrac{dg}{dx}$ ... Puis en notant $y = g(x)$ et $y_0 = g(x_0)$ on obtient :

$$\frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \times \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Or g étant dérivable en x_0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$$

Et comme f est dérivable en y_0

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y0} = f'(y_0)$$

D'où

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0} = f'(y_0) \times g'(x_0) = f'(g(x_0)) \times g'(x_0)$$

Ceci étant valable pour tout $x \in I$, on en déduit la dérivabilité de $f \circ g$ sur I et

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

Exemple :

Soit h définie par $h(x) = \sqrt{x^2+1}$. Ici, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $1 + x^2$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Avec $f(X) = \sqrt{X}$ et $g(x) = 1 + x^2$, on obtient $f'(X) = \dfrac{1}{2\sqrt{X}}$ et $g'(x) = 2x$, donc

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \times 2x$$

En fait, on dérive comme si $g(x)$ était une variable et on multiplie par la dérivée de « l'intérieur ».

Corollaire 2 :
soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si $f = \sqrt{u}$ (où u est strictement positive sur I) alors f est dérivable sur I et $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
- Si $f = u$ (avec $n \in \mathbb{Z}$ et u ne s'annulant pas sur I si $n < 0$) alors f est dérivable sur I et

$$f' = nu'u^{n-1}$$

Preuve
Il suffit d'appliquer le théorème précédent avec $g = u$

Exercice 2 **:**

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

Déterminer $f'(x)$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(2x^2 - x + 1\right)^6$$

Déterminer $f'(x)$

III-2 Applications

Application :
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I symétrique par rapport à 0. Démontrer que :

$$f \text{ paire } \Longrightarrow f' \text{ impaire}$$

$$f \text{ impaire } \Longrightarrow f' \text{ paire}$$

On posera $g(x) = -x$

Application :
On peut étudier les variations d'une fonction sans calculer sa dérivée. En effet, si f et g sont dérivables là où il faut, $(f \circ g)'$ sera du signe du produit des dérivées de f et g.
On en déduit que si g est dérivable sur I et f dérivable sur $g(I)$, alors
- La composée de deux fonctions croissantes est croissante
- La composée de deux fonctions décroissante est croissante
- la composée d'une fonction, croissante et d'une fonction décroissante est décroissante

Remarque : C'est comme la règle des signes !

Exemple :

Par exemple, pour la fonction

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} \end{array}$$

La fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc comme la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t}$ est croissante, f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a juste utilisé que la composée de deux fonctions croissantes est croissante, et que la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

III-3 Tableaux récapitulatifs des dérivées (suite et fin)

Opération sur les dérivées lorsque u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I		
Fonction	**Dérivée**	**Conditions**
$v \circ u$	$v'(u) \times u'$	
u^n avec $n \in \mathbb{Z}$	$nu'u^{n-1}$	$u \neq 0$ sur I si $n \leq 0$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I
$f(x) = \cos(ax+b)$	$f'(x) = -a\sin(ax+b)$	
$f(x) = \sin(ax+b)$	$f'(x) = a\cos(ax+b)$	
$f(x) = \tan(ax+b)$	$f'(x) = a(1+tan^2(ax+b))$	$x \neq k\dfrac{\frac{\pi}{2}-b}{a}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 3 **:**

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos^3 x$
2. $h(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-2}$
3. $k(x) = \dfrac{2}{5}\sqrt{25-x^2}$

IV) Primitives

IV-1 Découverte

Travail de l'élève **3.** Une automobile roule sur une autoroute rectiligne à 90 km.h^{-1}. En maintenant une accélération constante pendant 5 secondes, elle atteint une vitesse de 135 km.h^{-1}.

On veut calculer la distance d parcourue pendant ces 5 secondes.

Dans ce but, on prend pour origine des temps en seconde, l'instant où elle commence à accélérer et on appelle $x(t)$ la distance, en mètres, parcourue entre les instants O et t.

On rappelle que la vitesse $v(t)$, en m.s^{-1}, à l'instant t est $v = \dfrac{dx}{dt}$.

De plus, l'accélération constante, exprimée en m.s^{-2}, est $a = \dfrac{dv}{dt}$.

1. Calculer a. *On commencera par convertir la variation de vitesse en m.s^{-1}...*
2. **a.** Déterminer une fonction f dérivable sur $[0;5]$ et telle que $\dfrac{df}{dt} = a$

   b. En déduire que $v(t) = 2.5t + 25$ sur $[0;5]$
3. Déterminer l'expression de $x(t)$ en fonction de t et calculer la distance d.

Définition 3 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I (ou une partie non vide de $\mathbb{R}$).

On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur I et telle que

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x)$$

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 - 2x + \cos x$.

On cherche mentalement une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction $F(x) = x^3 - x^2 + \sin(x)$ convient. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a F est dérivable comme somme de fonctions dérivables et on a $F'(x) = f(x)$.

Remarquons que si l'on avait choisi pour fonction F celle définie par $F(x) = x^3 - x^2 + \sin x + 24$, nous aurions encore une candidate satisfaisante.

Remarque : Si f admet une primitive, elle en admet une infinité.

Théorème 5 : ***Condition suffisante (Admis)***

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Proposition 1 :

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.

Soient F et G deux primitives de f sur I.

Alors F et G diffèrent d'une constante :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = G(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

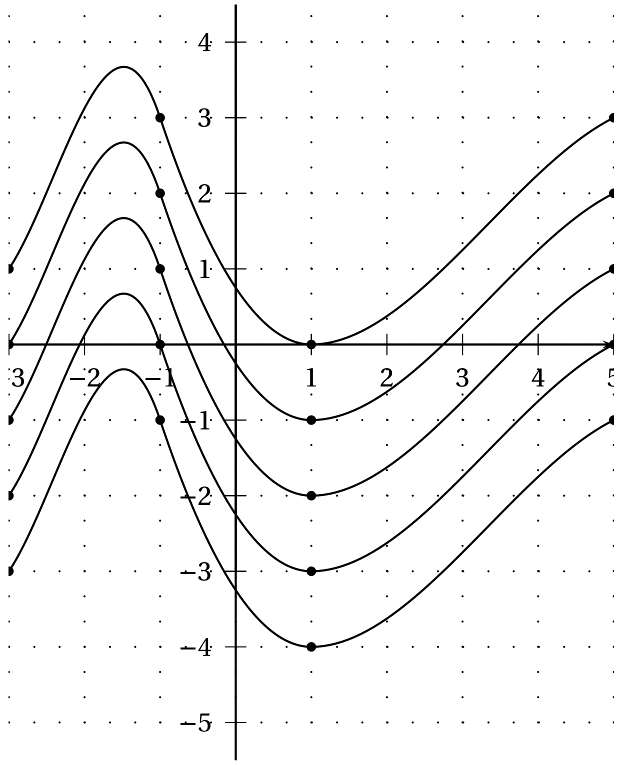
Preuve

Puisque F et G sont deux primitives de f sur I, on a $F' = G' = f$ sur I.
Donc $F' - G' = 0$ sur I. Ce qui équivaut à $(F-G)' = 0$ sur I. Or les seules fonctions qui ont une dérivée nulle sont les fonctions constantes [a]. Donc on a sur I :

$$F - G = k \qquad \text{où } k \text{est une constante.}$$

a. Ce théorème a été admet en première et se démontre à l'aide du théorème des accroissements finis.

Graphiquement, cela se traduit ainsi :



Exemples :

Trouver les primitives des fonctions suivantes sur les intervalles considérés.

1. $f(x) = 3$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x) = x$ sur $\mathbb{R}$
3. $h(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$
4. $k(x) = x^3$ su $\mathbb{R}$
5. $l(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ sur $\mathbb{R}$
6. $m(x) = \dfrac{4}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

Proposition 2 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient deux réels x_0 et y_0 . Il existe une unique primitive F de f sur I satisfaisant la condition initiale $F(x_0) = y_0$

Preuve

D'après le théorème, comme f est continue sur I, elle admet une primitive G sur I. D'après la proposition, toutes les primitives F de f sur I sont de la forme $F = G + k$ où k est une constante.
La condition $F(x_0) = y_0$ implique $F(x_0) = G(x_0) + k \Longleftrightarrow y_0 = G(x_0) + k$.
Donc $F = G + k$ avec $k = y_0 - G(x_0)$.
La constante k est déterminée de manière unique, ce qui démontre la proposition.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
Trouver l'unique primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 6$.
On remarque que $f(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u = x^2 + 1$.
On reconnaît alors l'expression dérivée de $G(x) = \sqrt{x^2+1}$.
Les primitives F de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $F(x) = \sqrt{x^2+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Or on veut $F(0) = 6 \Longleftrightarrow \sqrt{0^2+1} + k = 6 \Longleftrightarrow k = 5$.
Finalement, on a trouvé que la primitive cherchée est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \sqrt{x^2+1} + 5$.

IV-2 Tableaux des primitives

Les résultats de ces tableaux s'établissent en vérifiant que l'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

Fonction f	**Fonctions Primitives** F **(**$c \in \mathbb{R}$**)**	**Intervalle** I
$f(x) = k$ (constante)	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$ (a et b réels)	$F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$ et $n \neq -1$)	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n \leq 2$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}^{+*}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$	$\mathbb{R} - \{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$
$f(x) = \cos(\omega t + \phi)$ ($\omega \neq 0$)	$F(x) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \phi)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(\omega t + \phi)$ ($\omega \neq 0$)	$F(x) = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \phi)$	$\mathbb{R}$

Opération sur les primitives **lorsque u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I**		
Fonction	**Dérivée**	**Conditions**
$u'+v'$	$u+v$	
ku' (k constante)	ku	
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$u \neq 0$ sur I si $n \leq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\frac{v'}{v^2}$	$-\frac{1}{v}$	$v \neq 0$ sur I
$u'(v' \circ u)$	$v \circ u$	

Exemples :

Trouver les primitives des fonctions suivantes sur les intervalles considérés.

1. $f(x) = (x+3)^2$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x) = (2x+3)^4$ sur $\mathbb{R}$
3. $h(x) = (4-x)^3$ sur $\mathbb{R}$
4. $k(x) = 3x(x^2+1)^4$ su $\mathbb{R}$
5. $l(x) = x+1+\frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
6. $m(x) = \frac{3}{x+2}$ sur $\mathbb{R}^+$

Remarque : Notez que pour l'instant, on ne connait aucune primitivede la fonction inverse. Patience ...

Exercices du livre :

n° 2 + 6 p 193