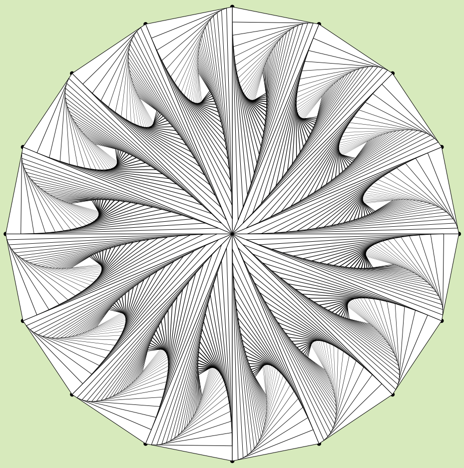
Chapitre 3

Fonctions : Limite et Continuité



Hors Sujet

Titre : « Flower Chucker »

Auteur : Banksy-Pochoiriste

Présentation succinte de l'auteur : Il combine les techniques du graffiti et du pochoir pour faire passer ses messages, qui mêlent souvent politique, humour et poésie comme Ernest Pignon-Ernest ou Blek le rat. Les pochoirs de Banksy sont des images humoristiques, parfois combinés avec des slogans. Le message est généralement antimilitariste, anticapitaliste ou antisystème. Ses personnages sont souvent des rats, des singes, des policiers, des soldats, des enfants ou des personnes âgées.

Il s'est forgé une certaine notoriété dans les milieux alternatifs et les médias traditionnels s'intéressent aussi à lui. Il a notamment travaillé sur le film Les Fils de l'homme2 et a réalisé en 2003 la pochette du disque de Blur, Think Tank.

Banksy a fondé le projet « Santa's Ghetto »en réalisant des peintures sur le mur de Gaza afin de redonner espoir aux habitants palestiniens et israéliens. Aidé par d'autres artistes, comme Ron English, un Américain, le mur de séparation prend petit à petit les couleurs d'une toile artistique géante, comme avec l'image de la petite Vietnamienne brûlée au napalm qui tient par la main Mickey Mouse et Ronald McDonald.

Concernant ce projet, Banksy raconte dans son livre Wall and Piece, qu'un jour, alors qu'il peignait sur le mur de séparation, un habitant est venu lui dire : « vous embellissez le mur ». Banksy, flatté : « Merci, c'est gentil », fut aussitôt coupé par le vieil homme : « On ne veut pas que ce mur soit beau, on ne veut pas de ce mur, rentrez chez vous ».

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »

THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

LEÇON 3

Fonctions : Limite et Continuité

Résumé

Les notions de continuité et de dérivabilité, et par suite d'intégration sont apparus tardivement dans l'histoire des mathématiques ($XVII^{\text{ème}}$ siècle) et ont permis de résoudre de nombreux problèmes auxquels les méthodes classiques n'offraient pas de solution générale comme le calcul de la vitesse instantanée, la recherche de trajectoire d'un objet en mouvement, le calcul de la longueur de la trajectoire d'une planète, le calcul de l'aire limitée par des courbes, ... Ce n'est qu'au siècle dernier que les mathématiciens ont travaillé avec rigueur en utilisant ces nouveaux objets, en effet ils se sont longtemps contentés d'utiliser des définitions intuitives.

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur $\mathbb{R}$ ou sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les intervalles considérées sont non vides et non réduit à un réel.

I) Préliminaires : Limites

I-1 Définition rigoureuse des limites

I-1.1 Limites en ∞

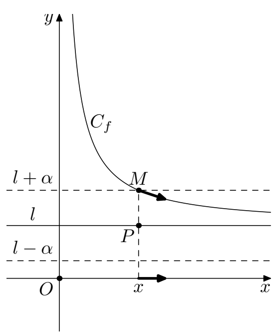
Nous allons donné ici des définitions très proche de celles rencontrés sur la convergence des suites numériques :

Définition 1 :

Une fonction f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$, lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote hoizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.



Exemple :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ signifie si I est un intervalle ouvert contenant 0, alors il existe une valeur x_0 telle que pour tout $x>x_0$ on a $f(x)\in I$. Montrons que cela est vrai.

Soit I un intervalle ouvert contenant 0, par exemple $I=]a;\epsilon[$, avec $a<0$ et $\epsilon>0$ et montrons qu'il existe un réel x_0 à partir duquel toutes les images $f(x)$ sont dans I. Pour cela, trouvons en un.

Remarquons déjà que $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$, on a $\quad f(x)\in I\Longleftrightarrow\frac{1}{x}<\epsilon\Longleftrightarrow x>\frac{1}{\epsilon}$

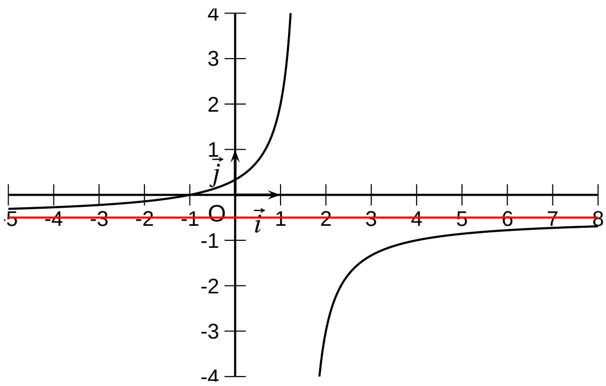
Ainsi, il suffit de choisir $x_0=\frac{1}{\epsilon}>0$, et on a bien que $\forall x>x_0,\quad f(x)\in I$

Exemple :

Soit g définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\}$ par $g(x)=\frac{1+x}{3-2x}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{-2x}=-\frac{1}{2}$.

La droite d'équation $y=-\frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de g.



Définition 2 :

Une fonction f tend vers :

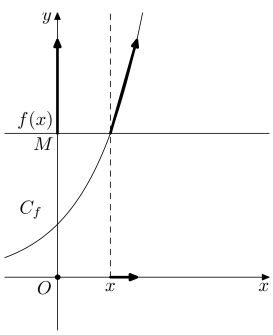
* $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, lorsque tout intervalle du type $]\lambda;+\infty[$, avec $\lambda\in\mathbb{R}$, contient toutes les images $f(x)$ pour x assez grand et on note :

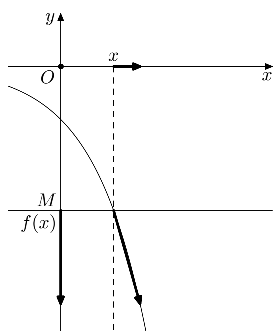
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

* $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, lorsque tout intervalle du type $]-\infty;\lambda[$, avec $\lambda\in\mathbb{R}$, contient toutes les images $f(x)$ pour x assez grand et on note :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

Remarque : Les définitions de limite quand x tend vers $-\infty$ sont analogues aux précédentes, avec $-x$ assez grand.





I-1.2 Limite en a, avec $a \in \mathbb{R}$

Définition 3 :

Une fonction f tend vers :

* un réel ℓ quand x tend vers un réel a, lorsque pour tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x assez proche de a.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

* $+\infty$ quand x tend vers un réel a, lorsque pour tout intervalle du type $]\lambda; +\infty[$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x assez proche de a.

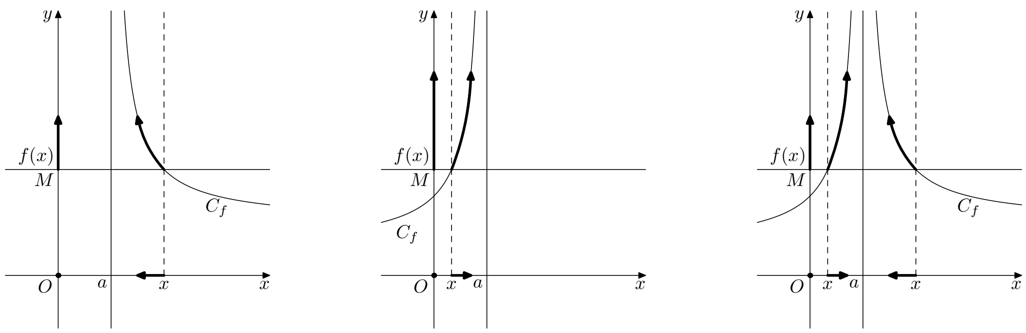
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

* $-\infty$ quand x tend vers un réel a, lorsque pour tout intervalle du type $]-\infty; \lambda[$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x assez proche de a.

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Dans les deux derniers cas, on dit que f admet une *asymptote verticale* d'équation $x = a$.

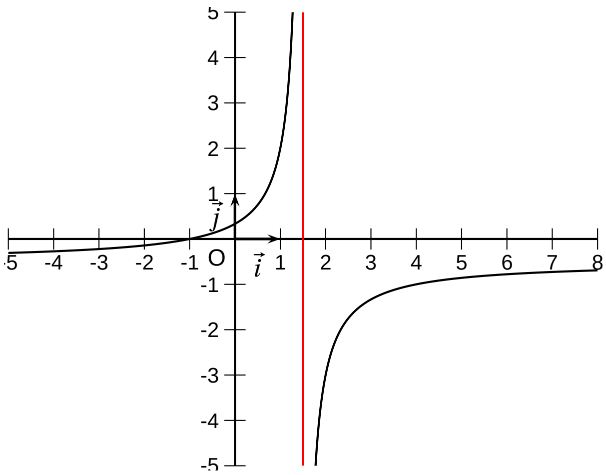
Illustration :



Exemple :

Soit g définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ par $g(x) = \dfrac{1+x}{3-2x}$.
On a $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^-} g(x) = +\infty$.

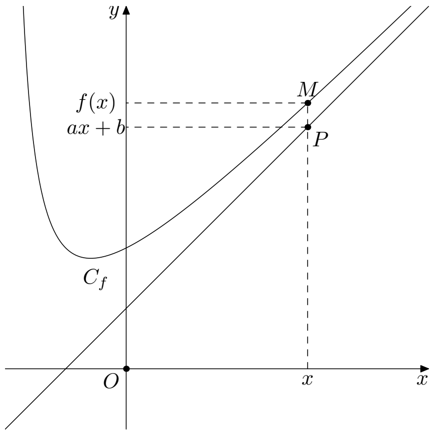
La droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$ est asymptote verticale à la courbe représentative de g.



I-1.3 Asymptotes obliques

Définition 4 :
La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe représentative d'une fonction f en $\pm\infty$ lorsque

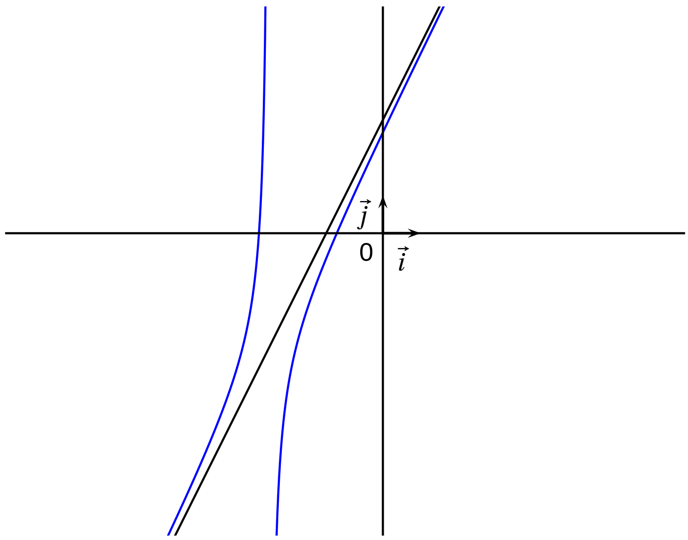
$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$



Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par

$$f(x) = \frac{2x^2+9x+8}{x+3}$$

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f possède-t-elle une asymptote horizontale ? verticale ? Si oui, préciser laquelle.
3. Démontrer que $f(x) = 2x+3-\dfrac{1}{x+3}$
4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(2x+3)]$
5. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-(2x+3)]$
6. En déduire l'asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$



Exemple :

Montrer que la droite $\mathscr{D} : y = 2x-1$ est asymptote à $\mathscr{C}$, la courbe d'équation $y = \dfrac{4x^2-2}{2x+1}$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

I-2 Méthodes classiques pour trouver une limite

1. **Les limites des fonctions de référence** sont à connaître par coeur.
   Les courbes représentatives de chacune sont un bon moyen pour retenir les limites.

Les limites à connaître

a. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ **c.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ **e.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

b. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ **d.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$ **f.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

2. **Les opérations sur les limites et les formes indéterminées** sont à connaître par coeur.
   Voir le cours de première. Rappelons tout de même les cas d'indétermination.

Les 4 formes indéterminées à connaître

« $0\times\infty$ » « $\frac{0}{0}$ » « $\frac{\infty}{\infty}$ » « $\infty-\infty$ »

Lorsque l'on a une forme indéterminée, l'idée est de changer l'écriture de l'expression en factorisant ou en développant, suivant l'écriture initiale. Les cas plus compliqués (non décrits ici) seront toujours guidés cette année.

3. **Détermination de** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.
   Les cas $x\to+\infty$ et $x\to-\infty$ se traitent de la même manière.
   A notre niveau, en considérant les points 1) et 2) acquis, il suffit de considérer les fonctions rationnelles (les fonctions polynômes sont des fonctions rationnelles de dénominateur 1).

Limites en l'infini de quotient de polynômes
La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est la limite du rapport des termes de plus haut degré, en tenant compte de leurs coefficients.

   a. On utilise ce résultat pour avoir une nouvelle expression rationnelle $g(x)$.
   b. On simplifie $g(x)$ au maximum.
   c. On trouve la limite, *qui peut être $\pm\infty$ ou $k\in\mathbb{R}$.*

4. **Détermination de** $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, **avec** $a\in\mathbb{R}$**.**
   L'étude à droite ou à gauche de a se fait de la même manière.
   On constatera que dans tous les cas soit a appartient à D_f, l'ensemble de définition de f, soit a est une borne de D_f, sinon la limite n'existe pas, et par conséquent, la question non plus.

   – **Si** $a\in D_f$ **alors** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
   Il faut donc toujours commencer par regarder si la fonction existe en a.

   – **Si** $a\notin D_f$ **alors** a **est une borne de** f**.**
   A notre niveau, il s'agira toujours du cas où f est une fonction rationnelle.

a. On remplace x par a dans l'expression de f.

b. Si l'on trouve que la limite vaut :

* « $\frac{k}{0}$ » , avec $k \in \mathbb{R}^*$:
  i. On cherche le signe du dénominateur
  ii. On applique la règle des signes au quotient et on trouve que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$
* « $\frac{0}{0}$ » :
  Alors a est une racine du numérateur et du dénominateur de f, on peut donc les factoriser tous les deux par $(x-a)$
  i. On factorise le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ par $(x-a)$
  ii. On simplifie ensuite le quotient le plus possible et on est ramené au début de l'étape 4 avec une nouvelle fonction g (simplifiée).
  En général, on aura alors $a \in D_g$, et donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$.

Exemple :

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $g : x \longmapsto \dfrac{3+x}{2-x}$ en $+\infty$, $-\infty$ et en 2.
2. $h : x \longmapsto \dfrac{3+x}{(2-x)^2}$ en $+\infty$, $-\infty$ et en 2.
3. $k : x \longmapsto \dfrac{2x-2}{x^2+x-2}$ en -2 et en 1.

I-3 Composée de deux fonctions

Théorème 1 : *admis*

Soient $u = f \circ g$, une fonction composée de deux fonctions f et g, et a, b et ℓ des nombres réels, ou éventuellement $+\infty$, ou $-\infty$.

Si on a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \ell$, alors :

$$\lim_{x\to a} u(x) = \ell$$

Preuve **Hors Programme**

Raisonnons dans le cas où $a = +\infty$, $b = -\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$ Soit J un intervalle ouvert qui contient ℓ.

Comme $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \ell$, J contient tous les réels $f(x)$ pour x strictement inférieur à un certain x_0.

De plus, comme $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$, l'intervalle ouvert $]-\infty; x_0[$ contient tous les réels $g(x)$ pour x supérieur à un certain réel x_1.

Si $x > x_1$, on a alors $g(x) < x_0$, et donc $f(g(x)) \in J$ i.e $u(x) \in J$

Ainsi tout intervalle ouvert J qui contient ℓ contient aussi tous les réels $u(x)$ pour x assez grand ; ce qui signifie que

$$\lim_{x\to +\infty} u(x) = \ell$$

Remarque : Ce théorème reste identique si $v_n = f(u_n)$.

Exemple :

Calculer la limites en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+1}{x+1}}$$

et (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \sqrt{\frac{2^{n+2}+1}{2^n+1}}$

Déterminer la limite éventuelle de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et démontrer que la suite (v_n) est convergente, préciser sa limite.

Solution **:**

Pour x positif, $f(x) = \sqrt{t}$ avec $t = \frac{4x+1}{x+1}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x+1}{x+1} = \frac{4x}{x} = 4$ (*fonction rationnelle en* $+\infty$)

et $\lim\limits_{t\to 4} \sqrt{t} = 2$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

De plus on a $v_n = f(u_n)$ avec $u_n = 2^n$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 2}$$

I-4 Théorème des gendarmes

Théorème 2 : ***de comparaison***

Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a;+\infty[$. Si, pour x assez grand, on a :

- $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $f(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Preuve

- Soit $J =]A;+\infty[$ un intervalle.
  Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ il existe un réel x_0 tel que $u(x) \in J$ à partir de x_0.
  De même il existe un réel x_1 tel que $f(x) \geq u(x)$ pour $x > x_1$
  Par conséquent pour $x > max(x_0;x_1)$ $f(x) \in J$ ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- Soit $J =]-\infty;A[$ un intervalle.
  Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$ il existe un réel x_0 tel que $u(x) \in J$ à partir de x_0.
  De même il existe un réel x_1 tel que $f(x) \geq u(x)$ pour $x > x_1$
  Par conséquent pour $x > max(x_0;x_1)$ $f(x) \in J$ ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Remarque : Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en $a \in \mathbb{R}$

Exemple :

1. Soit $f(x) = -x + \sin x$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. Soit $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

Théorème 3 : *Théorème des gendarmes*

Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a;+\infty[$.

Si pour x assez grand, on a $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \ell$, alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

Preuve

Soit J un intervalle ouvert contenant ℓ. Il s'agit de démontrer que J contient tous les réels $f(x)$ à partir d'un certain x_0.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \ell$, i.e qu'il existe x_1 tel que $u(x) \in J$ à partir de x_1 et il existe un réel x_2 tel que $v(x) \in J$ à partir de x_2.

Soit $x_0 = max(x_1; x_2)$. Si $x > x_0$, l'intervalle J contient $u(x)$ et $v(x)$, donc il contient aussi tous les réels compris entre $u(x)$ et $v(x)$, en particulier il contient $f(x)$, ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

Remarque : Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en $a \in \mathbb{R}$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{2+3\sin x}{x}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

II) Continuité d'une fonction

II-1 Notion de continuité

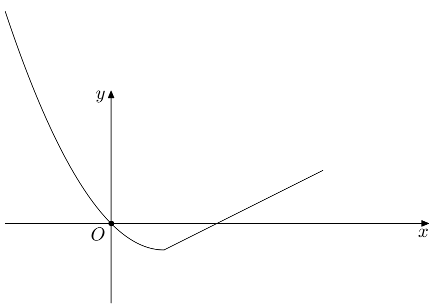
Définition 5 :

Soit I un intervalle contenant un réel a, et f une fonction définie au moins sur I (donc en a).

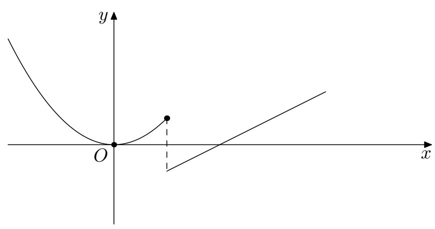
On dit que f est continue en a lorsque : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

On dit que f est continue sur I lorsqu'elle est continue en tout réel a de I.

Illustration :



On peut tracer la courbe de f sans lever le crayon. Elle ne présente pas de « saut », f est continue en tout point.



On ne peut pas tracer $\mathscr{C}_f$ sans lever le crayon, f présente une discontinuité en un point ; on dit qu'elle est discontinue en ce point.

Remarque : La condition $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ peut aussi s'écrire $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$

Exemple :

La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Démontrer cette propriété est assez ardu, car la définition de la continuité et donc de celle des limites n'est pas d'un usage aisé. Nous admettrons donc la continuité de nombreuses fonctions usuelles.

II-2 Contre-exemples

II-2.1 La fonction partie entière

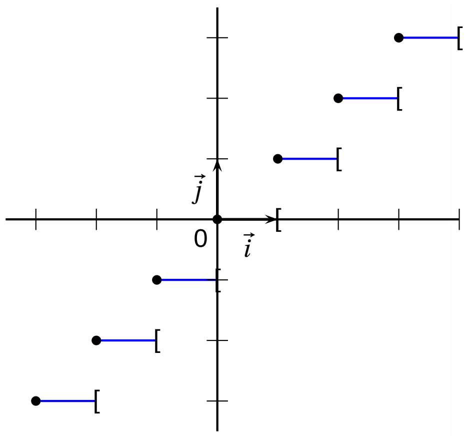
Notons E la fonction qui à un réel x associe sa partie entière :

$E(x) =$ le plus grand entier inférieur ou égal à x

Autrement dit, $E(x)$ est l'unique entier tel que :

$$E(x) \le x < E(x) + 1$$

Par exemple $E(\pi) = 3$, $E(-\pi) = -4$ [1]
Ci-contre, nous avons tracé $\mathscr{C}_E$.



Cette fonction admet des discontinuités en tout entier, en effet on a :

$$\lim_{x\to 2^+} E(x) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2^-} E(x) = 1$$

Les limites à droite et à gauche étant différente, la fonction partie entière n'admet pas de limite en 2, elle est donc discontinue en 2.

II-2.2 Autre cas

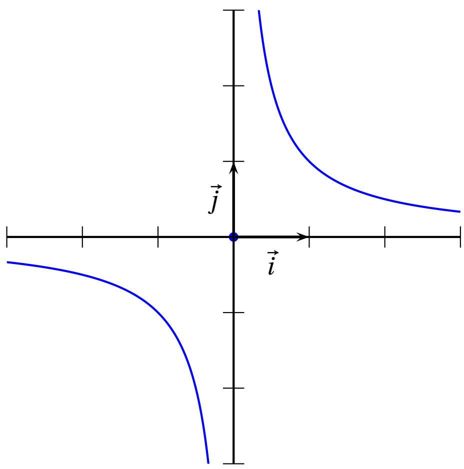
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

La fonction f n'est pas continue en 0, en effet :

$$f(0) = 0 \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

Autrement dit f n'admet pas de limite en 0.



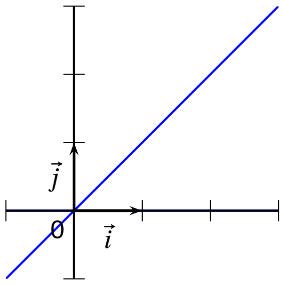
1. On remarquera que la fonction partie entière des mathématiciens n'est pas impaire contrairement à celle des informaticiens qui considère que $E(-\pi) = -3$

Attention !
Il ne faut pas confondre cette fonction avec la fonction inverse qui est continue en tout point de son ensemble de définition !

Remarque : On dit souvent qu'une fonction continue est une fonction que l'on peut représenter par un trait continu (obtenu sans relâcher le crayon). Il faut rester méfiant par rapport à cette interprétation, car il existe en mathématiques des fonctions « monstres »comme :

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

En apparence on pourrait croire que cette courbe se trace sans lever le crayon et pourtant la fonction présente une infinité de discontinuité.



II-3 Continuité des fonctions usuelles

Théorème 4 : *Admis*

Soit $a \in \mathbb{R}$. Une fonction définie en a et admettant une limite finie en a est continue en a.

Corollaire 1 :

Les fonctions polynômes, la fonction racine carrée, la fonction valeur absolue, les fonctions sinus et cosinus sont continues là où elles sont définies.

Théorème 5 : *Admis*

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $f + g$ est une fonction continue sur I
- fg est une fonction continue sur I
- λf est une fonction continue sur I
- Si de plus g est une fonction non nulle sur I, $\frac{f}{g}$ est continue sur I
- Si g est continue sur un intervalle contenant $f(I)$ alors $f \circ g$ est continue sur I

Corollaire 2 :

Toutes fonctions rationnelles à coefficients réels est continue sur son ensemble de définition.

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}}{x^2 + 1}$$

Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple :

Soit A un réel fixé et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ A & \text{sinon.} \end{cases}$

Quelle valeur doit-on donner à A pour que la foncion soit continue sur $\mathbb{R}$?

Exemple :

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 + x - 2x^2$. Etudier la continuité des fonctions

$$f : x \mapsto |u(x)|, \quad g : x \mapsto \frac{1}{u(x)} \text{ et } \quad h : x \mapsto \sqrt{u(x)}$$

Remarques :

- Toute fonction dérivable en a est continue en a. La réciproque est fausse (penser à la fonction valeur absolue)
- Par convention, les flèches d'un tableau de variations d'une fonction f traduisent la continuité et la stricte monotonie de f sur les intervalles considérés.

II-4 Limite d'une suite et d'une fonction continue

Théorème 6 : *Admis*

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite de réels de I qui converge vers $\ell \in I$. Alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(l)$, autrement dit :

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$$

Preuve **Hors Programme**

Comme f est continue en ℓ, on a :

$$\lim_{x \to \ell} f(x) = f(l)$$

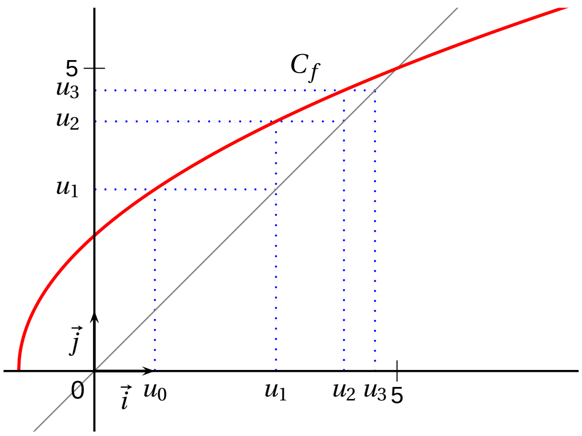
Considérons un intervalle ouvert J centré autour de $f(l)$. Il existe un intervalle ouvert L centré autour de ℓ tel que $f(x) \in J$ pour tout $x \in L$

Comme (u_n) converge vers ℓ, à partir d'un certain rang n_0 on aura $u_n \in L$ et donc $f(u_n) \in J$.

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5} \end{cases}$$



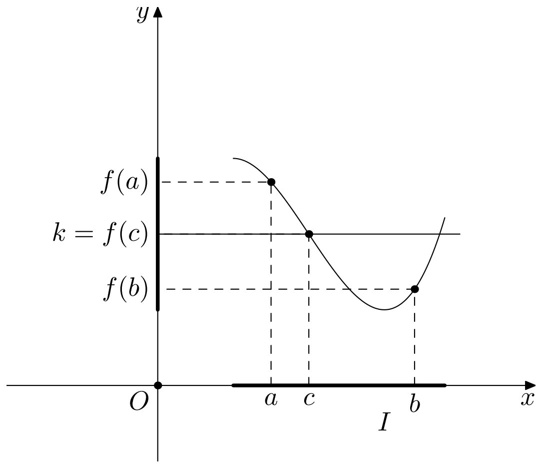
1. **a.** A l'aide de la représentation graphique ci-dessus, où f est définie par $f(x) = \sqrt{4x+5}$, conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n).
   b. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 5.
   c. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   d. En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ.
2. Expliquer pourquoi ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

II-5 TVI et corollaire

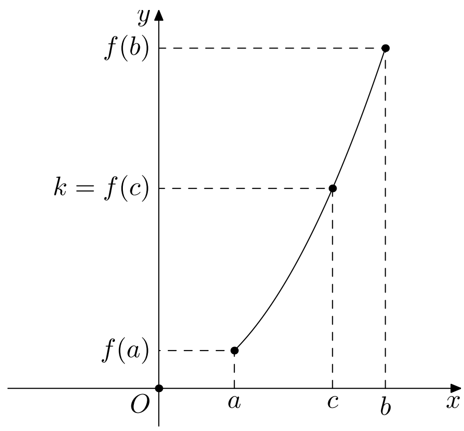
Théorème 7 : *des valeurs intermédiaires*
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I. pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$

Illustration :

Cas d'une fonction non monotone :



Cas d'une fonction monotone :



Remarques :

– L'hypothèse de continuité est essentielle, essayer d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction partie entière avec $a = 0$, $b = 1$ et $k = \frac{1}{2}$!
– Le TVI permet d'affirmer l'existence de solution(s) mais ne permet pas de les trouver !
En général, on en cherche une approximation par balayage à la calculatrice ou par dichotomie.

<u>Preuve</u> **Facultative**
Supposons $a < b$. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ et k un nombre réel tel que $f(a) \leq k \leq f(b)$ (le cas $f(b) \leq k \leq f(a)$ se traite exactement de la même manière).
On construit deux suites (a_n) et (b_n) telles que :
– $a_0 = a$ et $b_0 = b$
– Si $f\left(\frac{1}{2}(a_0 + b_0)\right) \leq k$, on prend $a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ et $b_1 = b_0$
sinon, on prend $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$.
– On réitère le même processus pour construire tous les termes de la suite i.e si $f\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right) \leq k$ on prend $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = b_n$, sinon on prend $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$

Preuve (Suite)

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$$

2. Montrer que la suite (a_n) est croissante, puis que la suite (b_n) est décroissante.
   En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
3. On note ℓ la limite commune des suites (a_n) et (b_n)
   - **a.** Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$$
   - **b.** Conclure.

Exemple :

Démontrer que l'équation $2\cos x = x - 1$ admet un moins une solution dans $\mathbb{R}$

Application :

Toute fonction polynôme P de degré impair admet au moins une racine réelle.

Preuve

Dans le cas où le coefficient devant le monôme de plus haut degré est positif (l'autre cas est identique) on a :

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$$

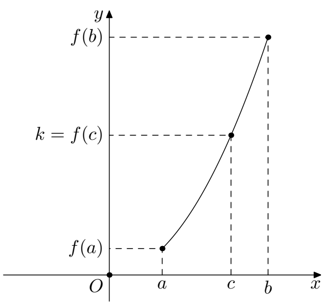
donc il existe $a \in \mathbb{R}^-$ tel que $P(x) < 0$. De même :

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$$

donc il existe $b \in \mathbb{R}^+$ tel que $P(x) > 0$.
P est une fonction polynôme donc P est continue sur $[a; b]$ avec $P(a) < 0$ et $P(b) > 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(c) = 0$

Corollaire 3 : Théorème de la bijection

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a; b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a; b]$.



Remarque : En ajoutant l'hypothèse de la monotonie, on récupère l'unicité de l'antécédent de k.

Preuve

- D'après le TVI, il existe un réel $c \in [a;b]$ tel que $f(c)=k$, d'où l'existence.
- Considérons le cas où f est une fonction strictement croissante sur $[a;b]$.
  Pour tout $x<c$ on a $f(x)<f(c)=k$ et pour tout $x>c$ on a $f(x)>f(c)=k$.
  Donc pour tout $x \neq c$ de l'intervalle $[a;b]$ on a $f(x) \neq f(c)$, par conséquent c est unique.

Remarque : Ce théorème s'étend au cas où f est définie sur un intervalle ouvert, semi-ouvert, borné ou non (les limites de f aux bornes de l'intervalle étant supposées connues).

Exemples :

1. Démontrer que l'équation $\sqrt{x} = \dfrac{5}{x-2}$ admet une unique solution réelle α ; puis encadrer α entre deux entiers consécutifs.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2$, dénombrer les solutions des équations suivantes :

   a. $f(x)=-1$ **b.** $f(x)=-5$

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(1+x)^3+x$.
   Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1;0]$ à 10^{-1} près.

III) Approximation des solutions d'une équation

La fonction f définie sur $[1;2]$ par $f(x)=x^3+x$ est strictement croissante.
De plus, $f(1)=2$ et $f(2)=10$. Donc l'équation $f(x)=3$ possède une unique solution α dans $[1;2]$.
On cherche à connaître α à 10^{-1} près.

III-1 Par balayage

Cela consiste à calculer $f(x)$, pour x allant de 1 à 2, tous les 10^{-1}. On fait donc un tableau de valeurs.
On cherche deux valeurs succesives de x pour lesquelles les images encadrent 3.
On trouve $f(1.2) \simeq 2.93$ et $f(1.3) \simeq 3.50$. Donc $\alpha \simeq 1.2$

III-2 Par dichotomie

Cela consiste à calculer $f(x)$ en prenant pour x le centre de l'intervalle de départ. On peut alors se ramener à un intervalle d'amplitude réduite de moitié, en fonction de si on a dépassé ou non la valeur cherchée.
On réitère le processus jusqu'à l'amplitude voulue (à la n^{eme} étape, on aura réduit l'amplitude de 2^n).
Ici on fait $f(1,5)=4,875>3$. Donc $\alpha \in [1;1.5]$.
Puis $f(1.25) \simeq 3.2 > 3$ donc $\alpha \in [1;1.25]$. $f(1.125) \simeq 2.55 < 3$ donc $\alpha \in [1.25;1.125]$.
$f(1.1875) \simeq 2.86$ donc $\alpha \in [1.1875;1.125]$. L'amplitude de cette intervalle est inférieur à 0.1, donc $\alpha \simeq 1.2$.

Remarque : Grâce à la calculatrice, la méthode de balayage est souvent plus rapide. Cependant, quand l'amplitude de départ est grande, ou l'approximation très petite, il est intéressant de combiner les deux méthodes, en commençant par la dichotomie, et finissant par le balayage.

Exemple :

Dénombrer les solutions réelles de l'équation $x^5-5x=-1$ et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.