Exercices : Limites et continuité

Exercice 1. Soit $f(x) = \dfrac{1+2\sin x}{1+\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

1. Démontrer que, si $x>0$ alors $-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \dfrac{3}{\sqrt{x}}$
2. En déduire que f admet une limite en $+\infty$ dont on précisera la valeur.

Exercice 2. Démontrer que, dans chacun des cas suivants, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{3x^2-2}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \longmapsto \dfrac{2-3x}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x}$ Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x+3$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$

Exercice 4. Démontrer qu'une suite, qui est décroissante et non minorée, a pour limite $-\infty$

Exercice 5. Soit (u_n) la suite définie, pour $n \geq 1$ par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier k compris entre 1 et n, on a $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
2. En déduire que, pour tout $n \geq 1$ on a $u_n \geq \sqrt{n}$
3. Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 6. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2-\cos x}$

1. Montrer que, pour tout réel x,
$$\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$$
2. En déduire les limites suivantes :

   a. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2-\cos x}$

   b. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x+\cos x}{2-\cos x}$

Exercice 7. On considère la fonction f définie pour $x \neq 1$ et $x \neq -2$ par :

$$f(x) = \frac{x^3-x^2-4x+5}{x^2+x-2}$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x distinct de 1 et -2 on ait :
$$f(x) = ax+b+\frac{c}{x^2+x-2}$$
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de f dans un repère orthonormal du plan, admet une asymptote oblique $\mathscr{D}$ et deux asymptotes verticales dont on précisera les équations.
3. Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

Exercice 8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x < 0 \\ x - 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f.
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9. Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x-1}{x^2+2}$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \longmapsto \sqrt{3x-1}$ sur $\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right[$
3. $f : x \longmapsto \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$
4. $f : x \longmapsto |3x-1|$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 10. Soit (E) l'équation $x^3 + 5x = 2$
- Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution dans l'intervalle $[0;1]$.
- Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.
- L'équation (E) admet-elle des solutions n'appartenant pas à l'intervalle $[0;1]$? Justifier.

Exercice 11. Déterminer le nombre de solutions non nulles de chacune des équations suivantes et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}

1. $x + \cos x = 1$
2. $x^2 = \sin x$

Exercice 12. Soit f la fonction définie, pour tout réel $x \neq 1$ par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3-1}$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x \neq 1$:
$$f'(x) = \frac{P(x)}{(x^3-1)^2}$$
où P est une fonction polynôme de degré 3 que l'on précisera.
2. Etudier les variations de la fonction P sur $\mathbb{R}$ et démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près. En déduire le signe de $P(x)$ selon les valeurs du réel x.
3. En utilisant les questions précédentes, déterminer les variations de la fonction f sur les intervalles où elle est définie.

Exercice 13. Soit f une fonction continue et définie sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans l'intervalle $[0;1]$. Démontrer que f admet (au moins) un point fixe dans $[0;1]$ [1]

Exercice 14. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des asymptotes horizontales ?
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -2x - \dfrac{1}{2}$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$

1. On considèrera la fonction g où $g(x) = f(x) - x$