EXERCICES : SUITES ET RÉCURRENCE

Exercice 1. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

où $a \in [-1; +\infty[$.
A l'aide d'un raisonnement par récurrence, étudier la monotonie de la suite (u_n) [1]

Exercice 2. Considérons la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n$

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+5}$.

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. On considère la suite définie par : $u_n = f(n)$.
   Déduire de ce qui précède que le sens de variation de la suite (u_n) et ses éventuelles bornes.

Exercice 4. Démontrer que chacune des suites (u_n) est minorée mais non bornée :

1. $u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n}}$
2. $u_n = \dfrac{n^2 + \cos n}{n+1}$

Exercice 5. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1} \end{cases}$$

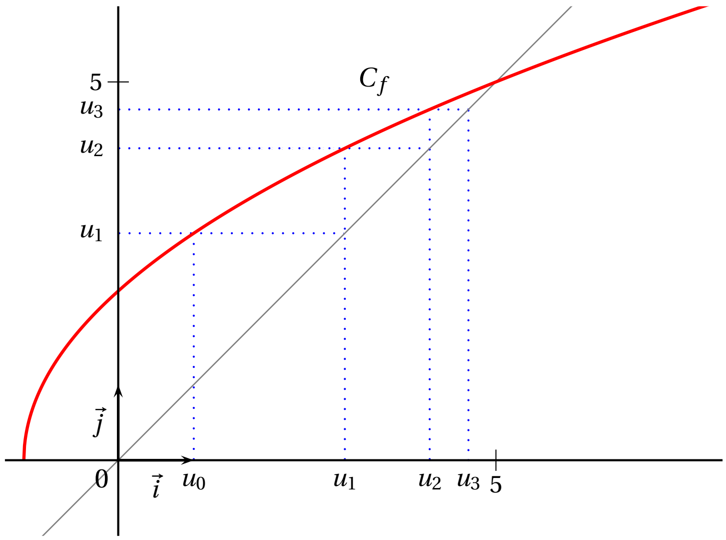
1. Démontrer que la suite (u_n) est à termes positifs et étudier son sens de variation.
2. En déduire que la suite (u_n) est bornée et préciser un majorant et un minorant.

Exercice 6.

1. Etudier la limite de la suite (u_n) où $u_n = (-1)^n + n$
2. Que penser de l'affirmation suivante : « Toute suite divergente vers $+\infty$ est nécessairement croissante. »

1. On comparera les valeurs u_0 et u_1 suivant les valeurs de a.

Exercice 7. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5} \end{cases}$



1. **a.** A l'aide de la représentation graphique ci-dessus, où f est définie par $f(x) = \sqrt{4x+5}$, conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n)

   b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   c. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 5.

2. **a.** En utilisant la définition d'une suite convergente, montrer que si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite (v_n), définie par $v_n = u_{n+1}$, converge également vers l.

   b. Soit (u_n) une suite convergente vers l définie par la donnée de son premier terme et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction continue en l[2].
   Montrer que $f(l) = l$

3. On se propose ici d'obtenir la limite de la suite (u_n) de la première partie par deux méthodes différentes.

   a. **Méthode 1** : Déterminer la limite de la suite (u_n) de la première partie en utilisant la question précédente. (on admet que la fonction f est continue).

   b. **Méthode 2** : La représentation graphique ayant amené à conjecturer que (u_n) converge vers 5, on s'interesse à la suite de terme général $v_n = 5 - u_n$.

   i. Montrer que
   $$v_{n+1} = \frac{4v_n}{5+\sqrt{25-4v_n}}$$

   ii. En déduire, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$0 \leq v_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \times 4$$

   iii. Conclure.

2. La continuité sera l'objet du chapitre suivant, on dit qu'une fonction f est continue en l si et seulement si $\lim\limits_{x\to l} f(x) = f(l)$

Exercice 8. On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

- Etudier le sens de variation de (u_n).
- Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
- En déduire que (u_n) est majorée par 2.
- Conclure sur la convergence de (u_n) [3]

Exercice 9. On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$

- Etudier le sens de variation de (v_n).
- Etablir que pour tout $k \geq 2$ on a $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.
- En déduire que (v_n) est majorée par 3.
- Conclure sur la convergence de (v_n). [4]

Exercice 10. On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

- Etudier le sens de variation de (w_n).
- Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $w_n \leq \frac{n}{n+1}$.
- En déduire que (w_n) est majorée par 1.
- Conclure sur la convergence de (w_n). [5]

Exercice 11. *Moyenne arithmético-géométrique*

Soit a et b deux réels tels $a > b > 0$. Soit (a_n) et (b_n) les suites définies par :

$$a_0 = a \qquad \text{et} \qquad b_0 = b$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

Le but de l'exercice est de démontrer que les deux suites convergent vers une même limite.

1. **a.** Montrer par récurrence, que (a_n) et (b_n) sont positives pour tout $n \in \mathbb{N}$

   b. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 \geq 0$

   c. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :

   $$a_{n+1} \geq b_{n+1} \qquad \text{et que} \qquad a_n \geq b_n$$

   d. En déduire que la suite (a_n) est décroissante et que (b_n) est croissante.

2. **a.** Démontrer que $0 \leq x \leq y \Longrightarrow (y-x)^2 \leq y^2 - x^2$. Pour cela on remarquera que $y - x \leq y + x$

   b. En déduire par récurrence, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :

   $$a_n - b_n \leq \frac{a-b}{2^n}$$

   c. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

3. Conclure.

3. Sa limite, difficile à déterminer vaut $\frac{\pi^2}{6}$
4. Sa limite est un nombre irrationnel, noté e que nous définirons plus tard dans l'année.
5. Sa limite est un nombre irrationnel, noté $\ln(2) \simeq 0.693$ que nous définirons plus tard dans l'année.