EXERCICES : ANNALES SUR LES SUITES

Exercice 1. (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Etude de propriétés de la fonction f

a. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

b. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = x$.
On note α la solution.

c. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$.
De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\,;\,+\infty[$.

2. Etude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$
Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

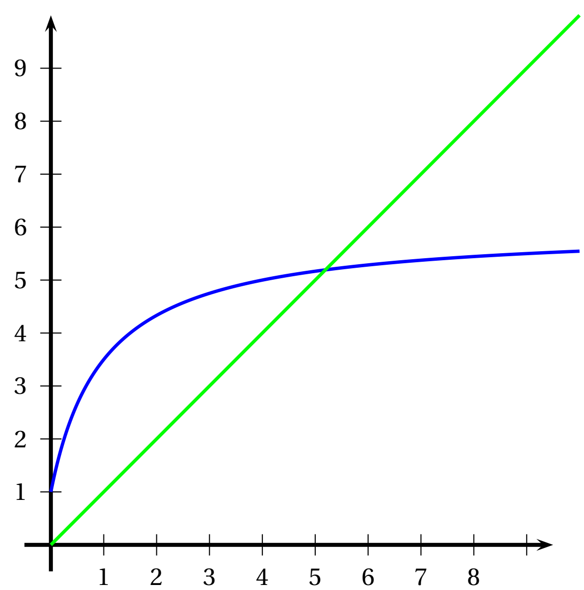
$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

a. Sur le graphique représenté ci-dessous, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$. Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\,;\,0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelles conjectures peut-on mettre quant au sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Etude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0
Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incompleète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'eévaluation.
Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?



Exercice 2. **VRAI OU FAUX** (2 points)

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n$.

1. La suite (u_n) est bornée.
2. La suite (u_n) converge.
3. La suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ converge.
4. Toute suite (v_n) à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0.

Exercice 3. *Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.* (4 points)

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

   a. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

   b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 6$.

   c. Etudier la convergence de la suite (u_n).

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:

$$n w_n = (n+1) w_{n-1} + 1 \text{ et } w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

   a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

   b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

Exercice 4. *Certains résultats de la PARTIE A pourront être utiliseés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.* (4 points)

PARTIE A : On définit :

– la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{4}{5}$.

– la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).
2. **a.** Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

   b. Calculer S_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

PARTIE B : Etant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$.

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse. Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

Exercice 5. (5 points)

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0,\ u_1 = 3$ et pour tout nombre entier naturel n,

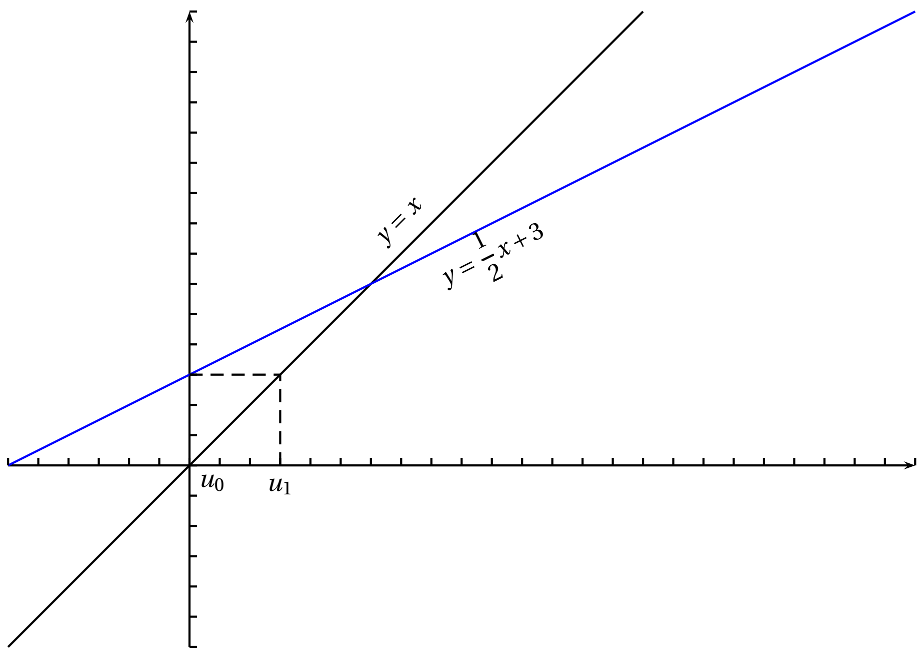
$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

- **a.** Calculer $u_2,\ u_3$ et u_4.
- **b.** Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.
- **c.** Sur la figure ci-dessous, sont tracées, dans un repère orthonormal les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 3$.
  A partir de u_0, en utilisant ces deux droites, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière placer les termes $u_2,\ u_3$ et u_4.
  Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite ?

2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $v_n = u_n - 6$.

- **a.** Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- **b.** Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
- **c.** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit (w_n) la suite de premier terme w_0 et telle que, pour tout nombre entier naturel n, $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 3$.
On suppose que w_0 est strictement suprieur 6.
Les suites (u_n) et (w_n) sont-elles adjacentes ? Justifier.



Exercice 6. (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A
On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) dfinies sur $\mathbb{N}$ et vrifiant la relation suivante :
pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} - x_n = 0,24x_{n-1}$.

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$.
Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'quation $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$.
En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).

On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme :

$$u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n \quad \text{o } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux rels.}$$

2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E).
Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6,6$.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{39}{7}(1,2)^n + \dfrac{3}{7}(-0,2)^n$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie B On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_0 = 6 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$.

a. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;8]$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.

2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.