I) Démonstration par récurrence

I-1 Exemple introductif

Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n(n+1)} \end{cases}$

Chaque terme de cette suite se calcule à partir du précédent. On dit que cette suite est définie ....
<u>But</u> : *On souhaiterait obtenir une formule .... de u_n en fonction de n, afin de pouvoir calculer n'importe quel terme rapidement (sans devoir calculer chacun des précédents).*

1. La suite est-elle géométrique ? arithmétique ?
2. Calculant les premiers termes de la suite jusqu'à u_5 sous forme de fraction irréductible.
3. Que vous attendez-vous à trouver pour u_6 ? Calculer u_6.
4. Conjecturer une valeur pour u_{101} ? Ce résultat est-il certain ?
5. Quelqu'un a eu le courage de calculer u_7, u_8, ..., jusqu'à u_100 et a trouvé $u_{100} = \dfrac{100}{101}$.
   Calculer u_{101}.

   Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation forcément vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété ***supposée*** *résultant d'un certain nombre d'observations.*
   Alors comment confirmer, par une démonstration, la propriété conjecturée ci-dessus ?

6. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété définie pour $n \in \mathbb{N}$, par : $\mathscr{P}(n)$: « $u_n =$ .... »
   Supposons un instant, que pour un certain entier k, on a calculé u_k et on a effectivement trouvé $u_k =$ ....,
   a. Quelle sera l'expression du terme suivant u_{k+1} ?
   b. La propriété $\mathscr{P}(k+1)$ est-elle vraie elle aussi ?
   Autrement dit ....
   On dit que la propriété $\mathscr{P}$ est ....
7. Connaissant u_6, quel terme en déduisez-vous grâce à la question 6. ?
   Puis quel autre terme ?
8. Au final on a vu que la propriété $\mathscr{P}$ était vraie au rang $n =$ ......, ..., ..., ..., ..., ..., ... et .... On dit que la propriété est ....
   Mais comme la propriété $\mathscr{P}$ est .... elle sera vraie au rang ......, puis au rang ......, puis au rang ......, etc.
   Quel conclusion pouvez-vous en tirer ?

Nous venons de faire un **raisonnement par récurrence**.