IV-2 Suites adjacentes

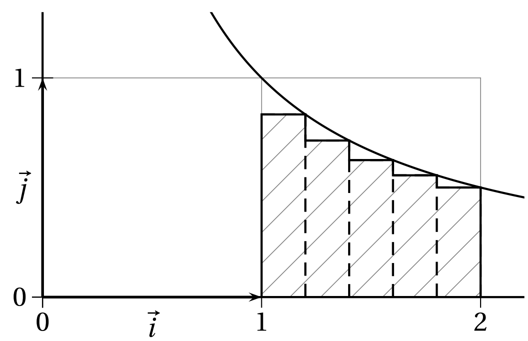
1. On considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction inverse : $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \in [1;2]$.
On voudrait trouver une valeur approchée de l'aire comprise entre $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

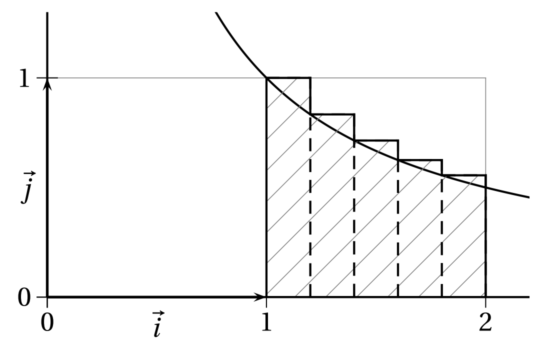
a. On découpe l'intervalle $[1;2]$ en 5 intervalles de même amplitude.

i. Donner les valeurs $x_0, x_1, \dots, x_5$ des bornes des intervalles.

ii. Déterminer les images de ces valeurs par f.

iii. En considérant les aires des 5 rectangles dont l'un des sommets est sur la courbe $\mathscr{C}$, déduire, l'expression de l'aire hachurée sur chacun des dessins ci-dessous.





b. On découpe désormais l'intervalle $[1;2]$ en n intervalles de même amplitude.

i. Donner les valeurs $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n$ des bornes des intervalles.

ii. Déterminer $f(x_k)$ pour tout $0 \leq k \leq n$.

iii. Calculer en fonction de n la somme des aires des n rectangles côte à côte de même largeur, situés « sous » la courbe $\mathscr{C}$ et dont l'un des sommets est sur la courbe $\mathscr{C}$ (sur le même principe que ci-dessus).
Même question pour les rectangles situés « au-dessus » de la courbe $\mathscr{C}$.

2. On considère désormais les suites (u_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

a. Déterminer les quatre premiers termes des suites (u_n) et (v_n) à 10^{-2} près.

b. Représenter les points correspondants sur un axe gradué.

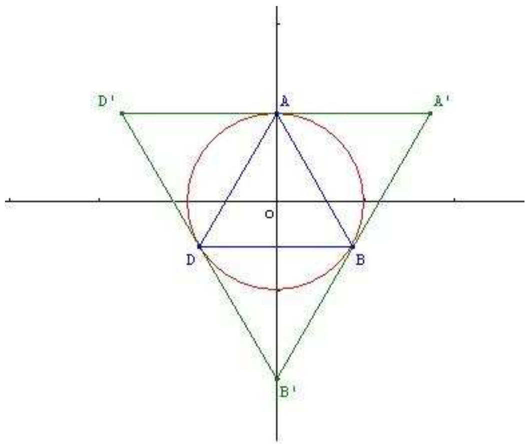
c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) décroissante.

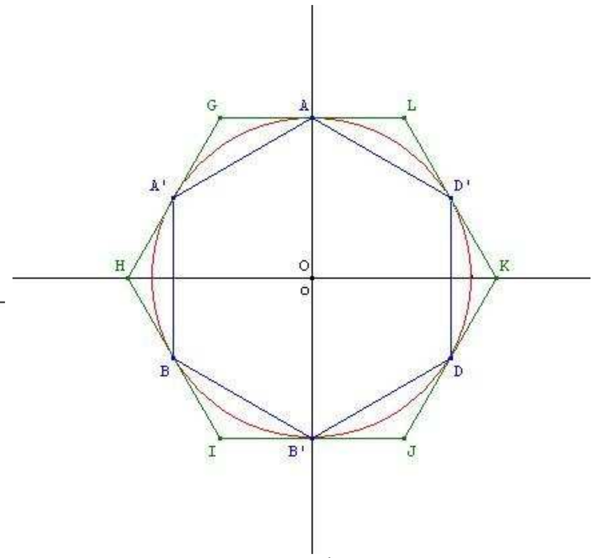
d. Calculer $v_n - u_n$ et démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.

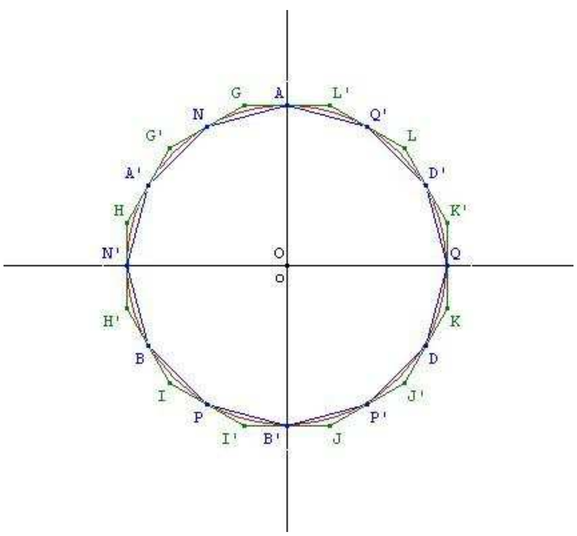
e. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement asymptotique des suites (u_n) et (v_n) ?

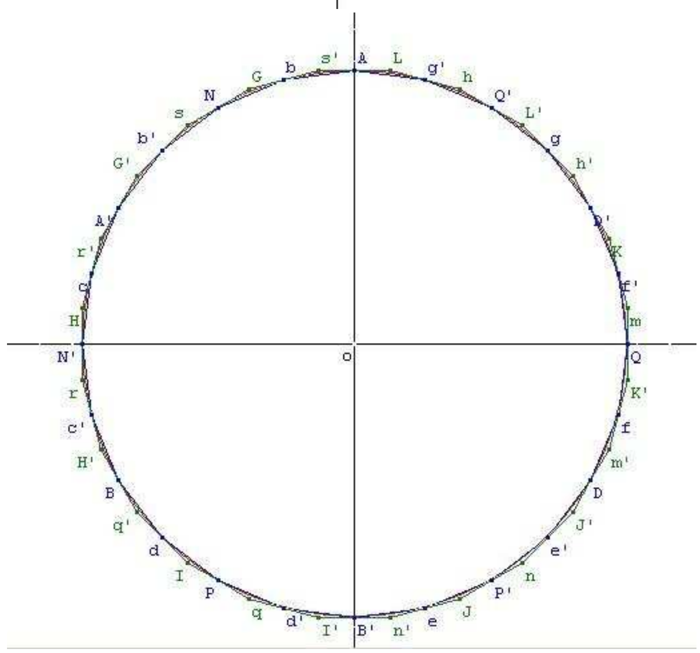
f. En utilisant une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_{50} et v_{50}.

Remarque : Sur le même principe, Archimède (III^e avant JC) décida d'encadrer l'aire d'un cercle de rayon 1 par celle d'un polygône régulier inscrit dans ce cercle et par celle d'un polygône régulier exinscrit.
En augmentant le nombre de côtés des polygônes, les aires (croissantes pour les inscrits, décroissantes sinon) se rapprochent tous de l'aire du cercle, à savoir π.
Voici les illustrations pour les triangles (3 côtés), les hexagones (6 côtés), les dodécagones (12 côtés) et les tétraicosagones (24 côtés).









Il démarre cette approximation avec un polygone à 3 côtés, et termine avec un polygone ayant 96 côtés.
Au fur et à mesure de son calcul, il encadre de plus en plus π, pour arriver à $3.14084507 < \pi < 3,14285714$