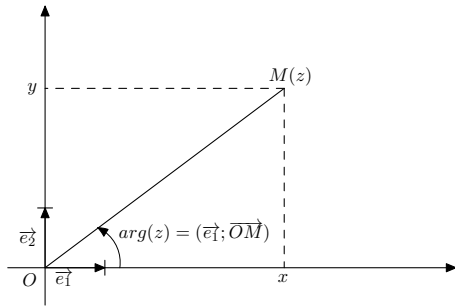


AIDE MÉMOIRE SUR LES NOMBRES COMPLEXES

On considère deux nombres complexes $z \neq 0, z' \neq 0$ de forme algébriques respectives $x + iy$ et $x' + iy'$, et $n \in \mathbb{Z}$.

Soient $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points, distincts deux à deux, du plan complexe, muni d'un repère orthonormé.



Remarque : On note que

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

où $r = |z| = OM$

Propriété 1 :

1. $z + \bar{z} = 2\Re(z)$	4. $-\bar{z} = -\bar{z}$	7. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ (avec $z' \neq 0$)
2. $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$	5. $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$	
3. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$	6. $\overline{z^n} = \bar{z}^n$	

Propriété 2 :

1. $ z = \sqrt{z\bar{z}}$ ou encore $ z ^2 = z\bar{z}$	4. $\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }$
2. $ z = -z = \bar{z} = -\bar{z} $	5. $ z + z' < z + z' $ car $z \neq 0$ et $z' \neq 0$
3. $ z \times z' = z \times z' $	

Propriété 3 :

1. $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$	4. $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
2. $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad [2\pi]$	5. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$
3. $\arg(-\bar{z}) = \pi - \arg(z) \quad [2\pi]$	6. $\arg(z^n) = n \times \arg(z) \quad [2\pi]$

ⓘ Critères pour qu'un nombre complexe soit réel (resp. imaginaire pur)

- $z \neq 0$ est réel si et seulement si :

$$\Im(z) = 0 \quad \iff \quad z = \bar{z} \quad \iff \quad \arg(z) = 0 \quad [\pi]$$

- $z \neq 0$ est un imaginaire pur si et seulement si :

$$\Re(z) = 0 \quad \iff \quad z = -\bar{z} \quad \iff \quad \arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

Propriété 4 :

L'équation $x^2 = a$ possède deux solutions dans \mathbb{C} :

- Si $a \geq 0$ ce sont les réels suivants : $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
- Si $a < 0$, ce sont les imaginaires purs conjugués suivants : $x = i\sqrt{-a}$ ou $x = -i\sqrt{-a}$

Théorème 1 :

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, b et c réels possède (une ou) deux solutions dans \mathbb{C} :

- Si $\Delta \geq 0$, ce sont les réels suivants :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, ce sont les complexes conjugués suivants :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Formes algébrique et trigonométrique

$$\begin{cases} x = |z| \cos \theta \\ y = |z| \sin \theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta \text{ tel que } \cos \theta = \frac{x}{|z|} \text{ et } \sin \theta = \frac{y}{|z|} \end{cases}$$

Remarque : On pourra trouver la valeur de nouveaux sinus et cosinus, en identifiant les écritures algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe.

Calculs avec les affixes

Soit G le barycentre de $(A; \alpha)$, $(B; \beta)$ (avec $\alpha + \beta \neq 0$) et I le milieu de $[AB]$. Alors :

$$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A \quad z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \quad z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$$

$$AB = |z_B - z_A| \quad (\vec{u}; \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$$

$$\left| \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right| = \frac{CD}{AB} \quad \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\vec{AB}; \vec{CD}) \quad [2\pi]$$

Alignement et droites parallèles

$$\text{Les points } A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \iff \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = 0 \text{ [}\pi] \iff \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \in \mathbb{R}$$

$$(AB) // (CD) \iff \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = 0 \text{ [}\pi] \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$(AB) \perp (CD) \iff \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ [}\pi] \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$$

Ensemble des points $M(z)$ tels que :

$ z - z_A = k$	\iff	$AM = k$ (avec $k \in \mathbb{R}$)	:	Si $k > 0$: Cercle $\mathcal{C}(A, k)$ Si $k = 0$: Point A Si $k < 0$: Ensemble vide
$ z - z_A = z - z_B $	\iff	$MA = MB$:	Médiatrice de $[AB]$
$\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = 0 \quad [\pi]$	\iff	$(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 0 \quad [\pi]$:	Droite (AB) privée de A et B
$\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = 0 \quad [2\pi]$	\iff	$(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 0 \quad [2\pi]$:	Droite (AB) privée du segment $[AB]$
$\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \pi \quad [2\pi]$	\iff	$(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi \quad [2\pi]$:	Segment $[AB]$
$\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$	\iff	$(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$:	Cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B
$\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$	\iff	$(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$:	Demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B tel que MAB soit rectangle direct.
$\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad , [2\pi]$	\iff	$(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$:	Demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B tel que MAB soit rectangle indirect.
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$	\iff	$x_{\overrightarrow{MA}} x_{\overrightarrow{MB}} + y_{\overrightarrow{MA}} y_{\overrightarrow{MB}} = 0$:	Cercle de diamètre $[AB]$

Remarque : Un angle orienté n'est défini que si les deux vecteurs ne sont pas nuls. C'est pourquoi les points A et B doivent être retirés le cas échéant, des ensembles ci-dessus.