Chapitre 1

Les nombres Complexes 1/2

Hors Sujet

Titre : « Autoportrait avec cigarette (1895) » et « La madone (1895-1902) »

Auteur : Edvard Munch

Présentation succinte de l'auteur : Edvard Munch (1863 - 1944) est un peintre expressionniste norvégien, souvent considéré comme le pionnier de l'expressionnisme et très tôt réputé pour son appartenance à une nouvelle époque artistique en Europe. L'importance de son œuvre est aujourd'hui reconnue dans le monde. Les œuvres de Munch les plus connues sont celles des années 1890, notamment *Le Cri* (1893) (cf fin du cours), pièce de la série *La Frise de la Vie*, que Munch a assemblée au tournant du siècle. Sa production ultérieure attire toutefois de plus en plus l'attention et semble inspirer tout spécialement les artistes actuels.

Munch traite d'une manière récurrente des thèmes de la vie, de l'amour, de la peur et de la mort. La collection la plus importante de ses œuvres se trouve au le Musée Munch dans Oslo. Quelques-unes de ses peintures se trouvent à la galerie nationale d'Oslo. L'Hotel Continental d'Oslo possède de nombreuses impressions. Enfin, la pinacothèque de Paris a organisé en 2010 la superbe exposition *Anti-Cri* regroupant de nombreux tableaux de Munch, issus de collections privées.

Le Cri et *La Madone* ont été volés le 22 août 2004 au musée Munch d'Oslo. Ils ont été récupérés dans des circonstances non connues en août 2006 en Norvège... Les deux œuvres ensemble sont estimées à 100 millions de dollars.

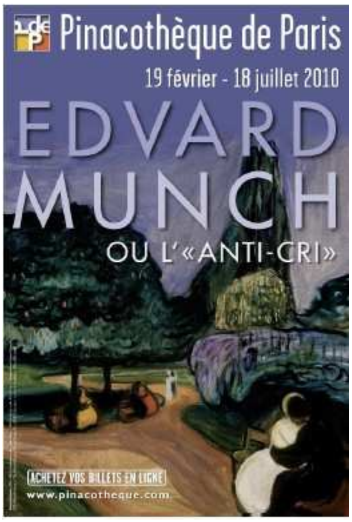
Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *La maladie, la folie et la mort sont les anges noirs qui ont veillé sur mon berceau* »

EDVARD MUNCH

Leçon 1



Les nombres Complexes 1/2

Résumé

Les nombres complexes portent bien leur nom ! Ils interviennent partout : en algèbre, en analyse, en géométrie, en électronique, en traitement du signal, en musique, etc. Et en plus, ils n'ont jamais la même apparence : tantôt sous forme algébrique, tantôt sous forme trigonométrique, tantôt sous forme exponentielle, ... Leur succès vient en fait de deux propriétés : en travaillant sur les nombres complexes, tout polynôme admet un nombre de racines égal à son degré et surtout ils permettent de calculer facilement en dimension 2. Ce n'est pas clair ? Alors détaillons !

I) Introduction

I-1 Approche historique

Travail de l'élève : Au début du XVI$^{\text{ème}}$ siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro, propose une formule donnant une solution aux équations du 3$^{\text{ème}}$ degré de la forme $x^3 + px = q$ [1] :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}}$$

1. Utilisez cette formule pour trouver une solution de l'équation $x^3 - 36 = 91$

2. **a.** Comme Bombelli à la fin de ce siècle, appliquer cette formule à l'équation $x^3 - 15x = 4$.

b. Quel problème est survenu ?

c. En admettant que l'on puisse prolonger les règles usuelles de calcul aux racines carrés de nombres négatifs, en utilisant le symbole imaginaire $\sqrt{-1}$ (qui n'a encore aucun sens), calculer $\left(2+\sqrt{-1}\right)^3$ et $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3$

d. Donner alors une solution réelle de l'équation (et vérifier).

Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessus ? C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes ...

En 1637, Descartes propose l'appellation de « nombres imaginaires », mais c'est Gauss en 1831 qui le premier les nomme les « nombres complexes ».
Euler, déclarant que la notation $\sqrt{-1}$ est absurde car elle conduit à une contradiction de la définition, introduit la notation i (comme imaginaire) en 1777 pour le nombre qui vérifie $i^2 = -1$.
L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ apparaît alors : ce sont les nombres de la forme $a + ib$, avec a et b réels.

1. Vous pouvez essayer de le prouver en posant $x = u + v$ et en résolvant un système d'équations d'inconnues u et v.

Les règles de calculs dans $\mathbb{R}$ sont conservées.
Les nombres imaginaires prennent leur statut officiel de nombres, avec pour représentation géométrique associée au nombre complexe $x+iy$ (x et y réels) le point du plan de coordonnées $(x;y)$ [2].
Ces nombres ont notamment servi pour formaliser la théorie de la relativité d'Einstein (1905). A notre niveau, ils sont utiles en géométrie et pour la résolution d'équations.

I-2 Approche ensembliste

L'équation $x+1=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, mais elle admet une solution -1 dans un ensemble plus grand $\mathbb{Z}$.
De même, l'équation $3x=1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$, mais elle admet $\frac{1}{3}$ comme solution dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ plus vaste que $\mathbb{Z}$
Et puis, l'équation $x^2=2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$; il faut chercher dans $\mathbb{R}$ pour en trouver.
En clair, quand une équation n'a pas de solutions, une démarche naturelle (et historique) pour en trouver consiste à en chercher dans un ensemble plus grand. Au stade de nos connaissances, l'ensemble numérique le plus grand est $\mathbb{R}$. Pourtant l'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$ ...
On va donc, dans ce chapitre « construire ? »enfin plutôt imaginer un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$ dans lequel l'équation $x^2+1=0$ possède des solutions. On l'appellera $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes. Le principal élément de $\mathbb{C}$ sera noté i (i comme imaginaire) et vérifiera $i^2=-1$. L'équation précédente possédera alors deux solutions :

$$x^2+1=0 \Longleftrightarrow (x+i)(x-i)=0 \Longleftrightarrow x=i \text{ ou } x=-i$$

Je vous rassure tout de même, toute équation polynomiale à coefficient dans $\mathbb{C}$ admet des solutions dans $\mathbb{C}$ (en fait, autant que le degré de l'équation). On ne construira donc pas d'ensemble plus grand que $\mathbb{C}$.

I-3 Forme algébrique d'un nombre complexe

Théorème 1 : *Définition*

On définit un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$:
- muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$
- contenant un nombre i vérifiant $i^2=-1$
- tel que chaque élément z de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière **unique** sous la forme :

$$z=x+iy \text{ avec } x \text{ et } y \text{ des nombres réels}$$

Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés **nombres complexes** ou encore **nombres imaginaires**.

Remarques :
- Une idée de la preuve de l'existence d'un tel ensemble est dans la partie annexe à la fin de ce document.
- Le prolongement des opérations de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ signifie que l'on garde les propriétés calculatoires de $\mathbb{R}$ (associativité, commutativité, distributivité, élément neutre, inverse ...) en remplaçant simplement i^2 par -1.

Définition 1 :

Soit $z\in\mathbb{C}$, alors il existe deux nombres réels x et y tels que $z=x+iy$.
- L'écriture $x+iy$ (unique) est appelée forme algébrique du nombre complexe z
- Le réel x est la **partie réelle** de z et se note $\Re\mathrm{e}(z)$
- Le réel y est la **partie imaginaire** de z et se note $\Im\mathrm{m}(z)$

Exemple :

Si $z=3+4i$ alors 3 est la partie réelle et 4 est la partie imaginaire.

2. Ce qui entraîne l'unicité de l'écriture

Attention !
La partie imaginaire est un **nombre réel** .

Exercice 1 **:**
Soit $z = 2+3i$ et $z' = 4+5i$. Déterminer la forme algébrique de $z+z'$. Donner les parties réelle et imaginaire de zz'.

Remarques :
- Si $\Im\mathrm{m}(z) = 0$ alors $z = \Re\mathrm{e}(z) + i0 = \Re\mathrm{e}(z)$, donc z est un réel et $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Si $\Re\mathrm{e}(z) = 0$ alors $z = 0+i\Im\mathrm{m}(z) = i\Im\mathrm{m}(z)$. On dit que z est un **imaginaire pur**. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$

Théorème 2 : ***égalité de deux nombres complexes***
Soient x, y, x' et y' quatre nombres réels, alors :

$$x+iy = x'+iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'$$

Preuve
- Montrons dans un premier temps que

$$x+iy = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0$$

$\Leftarrow$) Si $x = 0$ et $y = 0$ alors $x+iy = 0$
$\Rightarrow$) Supposons que $y \neq 0$, dans ce cas on a : $i = -\dfrac{x}{y}$ et par conséquent $i \in \mathbb{R}$, or il n'existe pas de nombres réels tels que $i^2 = -1$. Notre hypothèse est donc absurde, ce qui signifie que $y = 0$ et donc $x+0 = 0 \iff x = 0$
- Considérons désormais deux nombres complexes $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ tels que et montrons que

$$z = z' \iff x+iy = x'+iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'$$

$\Leftarrow$) Si $x = x'$ et $y = y'$ alors de manière évidente $z = z'$
$\Rightarrow$) Si $z = z'$ montrons que $x = x'$ et $y = y'$
Comme $z = z'$, on a $z - z' = 0 \iff x - x' + i(y - y') = 0$, par conséquent d'après la première partie de la démonstration :

$$x - x' = 0 \iff x = x' \qquad \text{et} \qquad y - y' = 0 \iff y = y'$$

Remarque : Le résultat précédent peut s'énoncer de la manière suivante : deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales.[3]

Exercice 2 **:**
On considère deux nombres complexes $z = 3+2i$ et $z' = 2-i$.
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $z+z'$
2. $z \times z'$
3. $z - z'$
4. $z+2z'$
5. $2z-3z'$
6. z^2

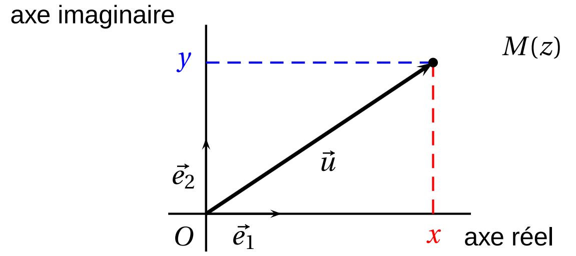
Remarques :
- Dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas de notion d'ordre, on ne pourra donc pas comparer deux nombres imaginaires.
- On évitera l'usage abusif du symbole radical $\sqrt{}$ qui reste réservé aux réels positifs.

3. Humour : Pourquoi la vie des hommes est-elle complexe ? Car elle possède une partie réelle et une partie imaginaire…

II) Interprétation géométrique

II-1 Le plan complexe

Dans tout le chapitre, on munit un plan orienté d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.



Définition 2 :

À tout nombre complexe $z = x + iy$, avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, on associe le point M de coordonnées (x, y) qu'on appelle **image** du complexe $z = x + iy$. On le note souvent $M(z)$.
Inversement, à tout point M du plan de coordonnées (x, y), on associe son **affixe** $z = x + iy$ qu'on note souvent z_M.
Enfin, à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est associé une affixe $z_{\vec{u}} = x + iy$ et inversement.

Exemple :

à $z = 2 - 5i$ correspond le point $M(2; -5)$ et réciproquement. L'affixe du point M est le nombre complexe z.
Placer les points A, B et C d'affixes respectives $3 + i$, $-3i$, -1 dans un repère orthonormé direct du plan et tracer $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$.
Quelle est l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{OA}$? $-\overrightarrow{OA}$? $\overrightarrow{AB}$?

Exercice 3 **:**

Déterminer l'affixe de $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $-\vec{e_1}$ et de $-\vec{e_2}$

Remarques :

- On a ainsi identifié le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct et l'ensemble $\mathbb{C}$, ce qui justifie l'appellation **plan complexe** de ce type de plan.
- Les réels étaient déjà identifiés depuis la seconde à une droite (incluse dans le plan)
- Cette identification permet d'affirmer que l'on ne peut pas prolonger à $\mathbb{C}$ la relation d'ordre de $\mathbb{R}$, car cela reviendrait à comparer deux points du plan, ou deux vecteurs, ce qui n'a pas de sens.

II-2 Premiers calculs géométriques

Propriété 1 :

Soient M et M' les points du plan complexe d'affixes respectives z et z'.
Un point S a pour affixe $z + z'$ si et seulement si $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.
Autrement dit : l'affixe d'une somme de deux vecteurs est la somme des affixes de ces deux vecteurs :

$$aff(\vec{u} + \vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$$

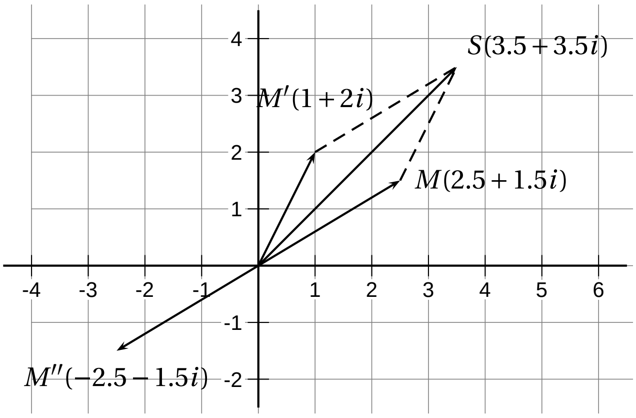
Preuve

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y,x',y' quatre réels.
Notons que $z + z' = (x + x') + i(y + y')$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} &\iff \overrightarrow{OS} = xe_1 + ye_2 + x'e_1 + y'e_2 = (x + x')e_1 + (y + y')e_2\\ &\iff S \text{ a pour affixe } (x + x') + i(y + y')\\ &\iff S \text{ a pour affixe } z + z'.\end{aligned}$$

Remarque : Les points $M(z)$ et $M'(-z)$ sont symétriques par rapport à O.
En effet $z + (-z) = 0$ donc $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO} = \vec{0}$.

Exemple :



Propriété 2 :

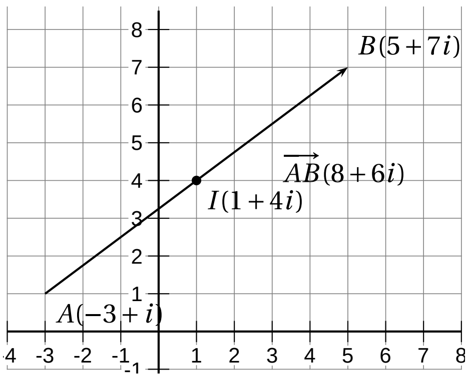
Soient les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B. Alors :

– L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$
– L'affixe du point I milieu de $[AB]$ est : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

Preuve

– Notons $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$.
On a $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$, donc l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $\left(x_B - x_A + i(y_B - y_A)\right)$
D'autre part, $z_B - z_A = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = x_B - x_A + i(y_B - y_A)$
Par conséquent l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $\overline{z_B - z_A}$
– Le point I est le point tel que $\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$

Exemple :



Rappel
Soit $(A;\alpha),(B;\beta)$ deux points pondérés tels que $\alpha+\beta\neq 0$. Il existe un unique point G vérifiant :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$$

Ce point s'appelle barycentre des points A et B.

Propriété 3 :
Soit G le barycentre de deux points pondérés $(A;\alpha),(B;\beta)$ (avec $\alpha+\beta\neq 0$).
Alors on a $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$.

Remarques :
- Cette propriété se généralise à n points pondérés (si le barycentre existe).
- L'affixe du barycentre est la moyenne pondérée des affixes des points.

Remarque : Ces applications permettent de traduire des problèmes de géométrie en relations entre nombres complexes.

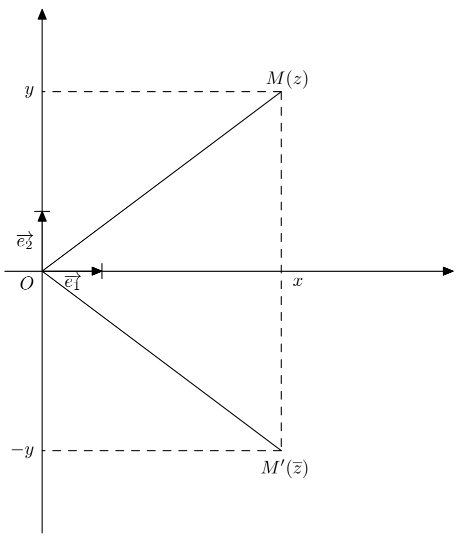
III) Conjugué d'un nombre complexe.

Définition 3 :
On considère un nombre complexe $z=x+iy$.
On appelle **conjugué** de z le nombre complexe, noté $\overline{z}$, tel que

$$\overline{z}=x-iy$$

On dit que z et $\overline{z}$ sont des **nombres complexes conjugués**.

Interprétation géométrique du conjugué :
Les images de deux nombres complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des réels :



En effet, un nombre complexe et son conjugué ont même partie réelle (abscisse) et des parties imaginaires opposées (ordonnées)

Exemple :
Le conjugué de $z = 4-2i$ est $\overline{z} = 4+2i$, le conjugué de i est $-i$, de 7 est 7.

Remarque : On a $\Re\mathrm{e}(z) = \Re\mathrm{e}(\overline{z})$

Corollaire 1 : Critère pour qu'un nombre complexe soit réel (resp. imaginaire pur)
On a :

$$z+\overline{z} = 2\Re\mathrm{e}(z) \qquad z-\overline{z} = 2i\Im\mathrm{m}(z)$$

Et les propriétés suivantes :

$$z \text{ est réel} \iff z = \overline{z} \qquad \text{et } z \text{ est imaginaire pur} \iff z = -\overline{z}$$

Preuve
Notons $z = x+iy$ avec x et y deux réels. Ainsi :

$$z+\overline{z} = x+iy+x-iy = 2x = 2\Re\mathrm{e}(z) \text{ et } z-\overline{z} = x+iy-(x-iy) = 2iy = 2i\Im\mathrm{m}(z)$$

On en déduit immédiatement que :

$$z \text{ est réel} \iff \Im\mathrm{m}(z) = 0 \iff z-\overline{z} = 0 \iff z = \overline{z}$$

$$z \text{ est imaginaire pur} \iff \Re\mathrm{e}(z) = 0 \iff z+\overline{z} = 0 \iff z = -\overline{z}$$

Théorème 3 :
Pour tout nombre complexe $z = x+iy$, on a :

$$z\overline{z} = x^2+y^2 \in \mathbb{R}$$

Preuve
$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y = x^2+y^2$

Application :
Pour écrire les nombres complexes fractionnaires sous la forme $x+iy$, i.e sous la forme algébrique on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée.

Exemple :

$$\frac{1}{3-4i} = \frac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

Exercice 4 **:**

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants : $\dfrac{1-i}{1+i}$ et $\dfrac{1}{2+i}$

Propriété 4 :
Pour tous nombres complexes z et z', on a :

1. $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$
2. $\overline{-z} = -\overline{z}$
3. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
4. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
5. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ (avec $z' \neq 0$)

Preuve

Soit $z = x + iy$ et $z' = x - iy$ (avec x, y, x' et y' réels), alors :

$$\overline{z+z'} = \overline{x+iy+x'+iy'} = \overline{x+x'+i(y+y')} = x+x'-i(y+y')$$

$$\overline{z}+\overline{z'} = \overline{x+iy}+\overline{x'+iy'} = x-iy+x'-iy' = x+x'-i(y+y')$$

Par conséquent $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$.

On démontre de manière similaire les autres égalités.

Exercice 5 :

Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

1. $z = \dfrac{4-5i}{3+i}$

2. $z = \dfrac{1}{2+i}$

Exercice 6 :

Déterminer le lieu des points M d'affixe z telle que $\dfrac{iz-1}{z-i}$ soit réel.

Application :

Si un polynôme, à coefficients réels, admet un nombre complexe z comme racine alors $\overline{z}$ est aussi une racine de P puisque, d'après les propriétés de la conjugaison (qui commute avec les exposants, les produits et les sommes) :

$$P(\bar{z})) = \overline{P(z)}$$

Et donc si $P(z) = 0$ alors $\overline{P(z)} = 0$ d'où $P(\overline{z}) = 0$

Exemple :

On donne $P(x) = x^2 + 1$. Déterminer les racines de P et vérifier qu'elles sont conjuguées.

Vérifier que le nombre complexe $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est racine de $Q(x) = x^2 + x + 1$. Donner une autre racine de Q.

IV) Equations du second degré à coefficients réels

IV-1 Equations du type $x^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}$

Travail de l'élève :

- Rappeler les solutions de l'équation $x^2 = a$ dans le cas où $a \geq 0$.
- On suppose que $a < 0$. Vérifier que $a = \left(i\sqrt{-a}\right)^2$.
  En déduire que l'équation considérée possède deux solutions complexes que l'on précisera.

Propriété 5 :

L'équation $x^2 = a$ possède deux solutions dans $\mathbb{C}$:

- Si $a \geq 0$ ce sont les réels suivants : $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
- Si $a < 0$, ce sont les imaginaires purs conjugués suivants : $x = i\sqrt{-a}$ ou $x = -i\sqrt{-a}$

Exercice 7 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$x^2 = -3 \qquad z^2 + \frac{3}{4} = 0 \qquad z^2 = \cos^2\theta - 1 \qquad x + \frac{1}{x} = 0$$

IV-2 Equations du type $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$

Travail de l'élève : Considérons le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Rappeler les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ lorsque $\Delta \geq 0$.
  On rappelle que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ peut s'écrire de manière équivalente $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.
- On suppose que $\Delta < 0$. Vérifier que $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$.
  En remplaçant Δ par cette nouvelle écriture, transformer l'équation considérée en une équation produit.
  En déduire que l'équation considérée possède deux solutions complexes que l'on précisera.

Théorème 4 :

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, b et c réels possède (une ou) deux solutions dans $\mathbb{C}$:

- Si $\Delta \geq 0$, ce sont les réels suivants :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, ce sont les complexes conjugués suivants :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

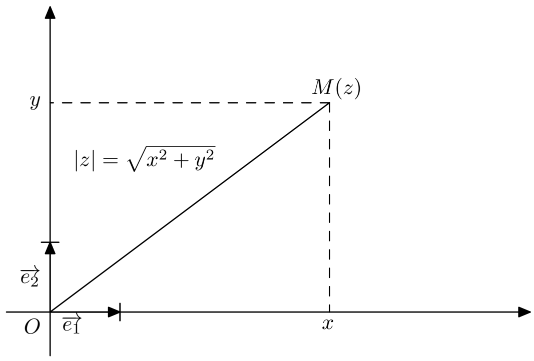
Exercice 8 :

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$$2z^2 - 3z + 4 = 0 \qquad x^2 - 2x + 2 = 0 \qquad 2z^4 + z^2 - 10 = 0$$

V) Module et argument d'un nombre complexe

V-1 Module



Définition 4 :

On considère z un nombre complexe, $z = x + iy$ (x et y réels).
Le **module** de z est le nombre réel, noté $|z|$, défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarque :

- Si z est l'affixe d'un point M, le module de z n'est autre que la distance OM : $OM = |z|$.
  Par conséquent si z est l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors $|z|$ représente la distance AB : $AB = |z_B - z_A|$
- $|z| \geq 0$ pour tout nombre complexe z
- On a $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ ou encore $|z|^2 = z\overline{z}$
- $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$
- Si $z = x + iy$ est réel ($y = \Im\mathrm{m}(z) = 0$), on a $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$. Le module d'un nombre réel est donc sa valeur absolue, ce qui justifie la notation.

Exemple :

Si $z = 3 - 4i$, alors $|z| = 5$. Si $z = 9i$ alors $|z| = 9$.

Exercice 9 **:**

On donne $z_A = -1 + 4i$ et $z_B = 2 - i$. Notons A l'image de z_A et B l'image de z_B ; calculer la distance AB.

Propriété 6 :

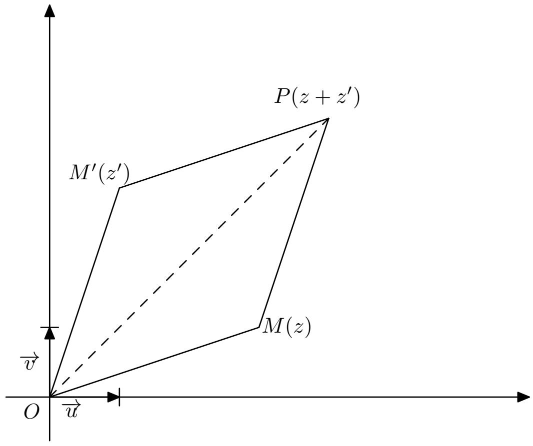
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

1. $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
2. Si $z = x + iy$ alors $|z| \geq max(|x|, |y|)$
3. $|zz'| = |z||z'|$
4. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
5. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

Preuve

1. $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Longleftrightarrow x^2+y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ et $y = 0$
2. $x \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z|$ et de même $y \leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z|$
3. $$|zz'|^2 = zz' \times \overline{zz'} = zz' \times \overline{z} \times \overline{z'} = z\overline{z} \times z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2$$
   Comme un module est positif on obtient : $|zz'| = |z||z'|$
4. $$\left|\frac{z}{z'}\right|^2 = \frac{z}{z'} \times \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{z \times \overline{z}}{z' \times \overline{z'}} = \frac{|z|^2}{|z'|^2}$$
   Comme un module est positif on obtient : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
5. Pour comprendre l'inégalité triangulaire il suffit d'observer cette figure :

On a bien $OP \leq OM + OM'$
et donc $|z+z'| \leq |z| + |z'|$



Démonstration plus rigoureuse : Comme les deux membres de l'inégalité sont positifs, il suffit donc de comparer les carrés de chaque membre. Or

$$|z+z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')} = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = |z|^2 + (z\overline{z'} + \overline{z}z') + |z'|^2$$

D'autre part

$$(|z|+|z'|)^2 = |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2$$

Il s'agit donc de comparer les « doubles produits ». Or, $z\overline{z'} + \overline{z'}z = z\overline{z'} + \overline{\overline{zz'}} = 2\Re(zz') \leq 2|zz'|$ d'après une propriété ci-dessus. Donc

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + (z\overline{z'} + \overline{z}z') + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 = (|z|+|z'|)^2$$

Exercice 10 :

Soient $A(0;4)$, $B(3;0)$ et $C(6;8)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

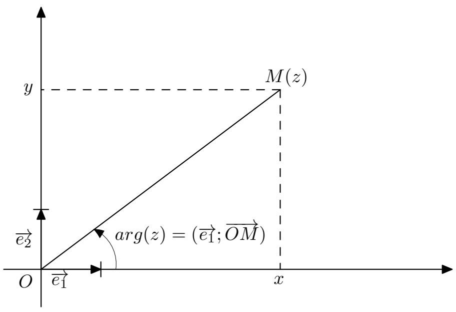
Application :

Soient u et v deux nombres complexes distincts et de même module r, montrer que $\dfrac{u+v}{u-v}$ est un imaginaire pur. On a :

$$\overline{\left(\frac{u+v}{u-v}\right)} = \frac{\overline{u}+\overline{v}}{\overline{u}-\overline{v}} = \frac{uv\overline{u}+uv\overline{v}}{uv\overline{u}-uv\overline{v}} = \frac{|u|^2v+u|v|^2}{|u|^2-u|v|^2} = \frac{r^2v+ur^2}{r^2-ur^2} = -\frac{u+v}{u-v}$$

Ce qui prouve que $\dfrac{u+v}{u-v}$ est un imaginaire pur.

V-2 Argument d'un nombre complexe



Remarque : On note que

$$\boxed{z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

où $r = |z| = OM$

Définition 5 :
Soit z un nombre complexe non nul d'image M.
On appelle **argument** de $z \neq 0$ toute mesure, en radians, de l'angle $(\vec{e_1}\ ;\ \overrightarrow{OM})$. On note $\theta = \arg(z)$

Remarques :

- Un nombre complexe possède une infinité d'arguments ! En effet si θ est un argument de z, tout autre argument est de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'unique argument appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$ s'appelle l'argument principal.
  On notera par exemple $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$ ou $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$ modulo 2π pour signifier que $\arg(z)$ peut-être égal à $\dfrac{\pi}{4}$ mais aussi à n'importe lequel des nombres $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- Si z est l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors $z = z_B - z_A$. Par conséquent, $\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)\,[2\pi]$.

Attention !

Le nombre complexe $z = 0$ ne possède pas d'argument car, dans ce cas, l'angle $(\vec{e_1}\ ;\ \overrightarrow{OM})$ ne se définit pas.

Exemple :

On voit clairement de part leur position dans le plan complexe que :

$\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$, $\quad\arg(-1) = \pi\,[2\pi]$, $\quad\arg(i+1) = \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

$\arg(1) = 0\,[2\pi]$, $\quad\arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$

Mais ce n'est pas toujours aussi simple !

Remarque :

- Si $z \in \mathbb{R}^+$ alors $\arg(z) = 0[2\pi]$, si $z \in \mathbb{R}^-$ dans ce cas $\arg(z) = \pi[2\pi]$
- De la même manière un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement positive a un argument égal à $\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement négative a un argument égal à $-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Par conséquent :

$$z \in \mathbb{R}^* \iff \arg(z) = 0\,[\pi]$$

$$z \in i\mathbb{R}^* \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$$

Théorème 5 :
Soient $z \in \mathbb{C}^*$, $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
z a pour module r et pour argument θ modulo 2π si et seulement si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
Cette écriture s'appelle une **forme trigonométrique** de z, elle n'est pas unique.

Preuve
($\Rightarrow$) Vu en début de paragraphe (Pythagore).
($\Leftarrow$) Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors $|z|^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta = r^2 \iff |z| = r$ puisque $r > 0$.
De plus, si θ' est un argument de z alors :

$$z = r(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

Par conséquent $\theta' = \theta[2\pi]$ et donc θ est un argument de z.

Remarque : Le nombre complexe nul n'a pas de forme trigonométrique (puisque pas d'argument)

Exercice 11 **:**

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe z de module $\sqrt{5}$ et dont un argument est $\frac{2\pi}{3}$

Exercice 12 **:**

Déterminer une forme trigonométrique de $z = -2\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$

Remarques :

- L'argument d'un nombre complexe n'étant pas unique, il en va de même de la forme trigonométrique, contrairement à la forme algébrique.
- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même module et des arguments égaux à un multiple de 2π près.

Méthode calculatoire pour trouver l'argument d'un nombre complexe
Soient $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + iy$.
- On calcule le module de z.
- On factorise l'écriture de z par $|z|$: $z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right)$
- On reconnait alors la valeur d'un angle remarquable (ou d'un angle associé grâce à la configuration du rectangle dans le cercle trigonométrique) θ tel que $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{1}{|z|}$

Exemple :

Reprenons l'exemple de $z = 1 + i$. On a $|z| = \sqrt{2}$ et $z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ Or $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Donc un argument de z est bien $\frac{\pi}{4}$

Remarque : Il arrivera rarement que l'argument ne soit pas une valeur remarquable. Dans ce cas, on utilisera la calculatrice.

Exercice 13 :

Calculer un argument de $z=\sqrt{3}+i$, $z'=-\sqrt{3}+i$ et de leur conjugués.

Exercice 14 :

Déterminer la forme algébrique et une forme trigonométrique de $z=-5\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

Résumé

Soit $z\in\mathbb{C}^*$ de forme algébrique $z=x+iy$, de module r et d'argument principal θ. Alors :

$$\begin{cases} x = r cos\theta \\ y = r sin\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta \text{ tel que } \cos\theta=\frac{x}{r} \text{ et } \sin\theta=\frac{y}{r} \end{cases}$$

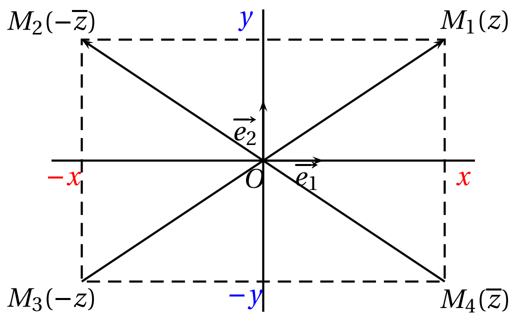
Propriété 7 :

Soit $z\in\mathbb{C}^*$ et $n\in\mathbb{Z}$:

1. $\arg(\overline{z})=-\arg(z)\,[2\pi]$
2. $\arg(-z)=\arg(z)+\pi\,[2\pi]$
3. $\arg(-\overline{z})=\pi-\arg(z)\,[2\pi]$
4. $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')\,[2\pi]$
5. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')\,[2\pi]$
6. $\arg(z^n)=n\times\arg(z)\,[2\pi]$

Preuve

Les trois premières propriétés se déduisent immédiatement de la figure suivante :



4. Soit $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$, alors

$$zz'=rr'[(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')]$$

Vous qui connaissez parfaitement vos formules d'addition (vu en première), vous en déduisez que

$$zz'=z=rr'(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta'))$$

Ainsi, nous arrivons au résultat capital : $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')\,[2\pi]$

5. $\arg\left(\frac{1}{z}\right)+\arg(z)=\arg(\frac{1}{z}\times z)=\arg(1)=0\,[2\pi]$, donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)\,[2\pi]$

Alors $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg\left(z\times\frac{1}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')\,[2\pi]$

Preuve (Suite)

6. Montrons déjà par récurrence la propriété sur les entiers naturels. Soit $\mathscr{P} : \arg(z^n) = n \times \arg(z)\,[2\pi]$.
   - Initialisation :
     Si $n = 0$ alors $\arg(z^0) = \arg(1) = 0\,[2\pi]$. Donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - Hérédité : Supposons qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ l'est, ie $\arg\left(z^{k+1}\right) = (k+1) \times \arg(z)\,[2\pi]$.

$$\begin{aligned}
\arg\left(z^{k+1}\right) &= \arg(z \times z^k)\,[2\pi] \\
&= \arg(z) + \arg(z^k)\,[2\pi] && \text{d'après 4)} \\
&= \arg(z) + k\arg(z)\,[2\pi] && \text{(HR)} \\
&= (k+1)\arg(z)\,[2\pi]
\end{aligned}$$

     Donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
   - Conclusion $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Enfin, montrons la propriété $\forall n \in \mathbb{Z}$. Si $n < 0$, alors

$$\arg(z^n) = \arg\left(\frac{1}{z^{-n}}\right) = \arg\left(\left(\frac{1}{z}\right)^{-n}\right) = -n\arg\left(\frac{1}{z}\right) = n\arg(z)\,[2\pi]$$

Remarques :

- Les formes algébriques sont pratiques pour les additions
- Les formes trigonométriques sont pratiques pour les multiplications :
  - **Pour multiplier** deux nombres complexes *non nuls*, on **multiplie les modules** et on **additionne les arguments**.
  - **Pour diviser** deux nombres complexes *non nuls*, on **divise les modules** et on **soustrait les arguments**

Exercice 15 :

Déterminer une forme trigonométrique de $z = \dfrac{1}{1+i}$ et de $z' = (1+i)\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{4}\right)$

Exercice 16 :

Déterminer une forme trigonométrique de $z = -2\sqrt{3} + 2i$ puis de $z' = 3 - 4i$, en déduire une forme trigonométrique de zz' et de $\dfrac{z}{z'}$

Exercice 17 :

Soit $z = 3\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ et $z' = 2\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$. Calculer zz'.

V-3 Applications géométriques

Propriété 8 :

Soient A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Alors :

$$\left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = \frac{CD}{AB} \qquad \text{et } \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\,[2\pi]$$

Preuve

$$\left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = \frac{CD}{AB}.$$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{CD}\right) - \left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{e_1}\right) = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right)\ [2\pi]$$

Conséquences

Les points A, B et C sont alignés $\iff \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = 0\,[\pi]$

$\iff \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \in \mathbb{R}$

Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires $\iff \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$

$\iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$

Caractérisation des cercles et des médiatrices

– Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon R.

$$M(z) \in \mathscr{C} \iff \Omega M = R \iff |z - \omega| = R$$

– Soit Δ la médiatrice d'un segment $[AB]$.

$$M(z) \in \Delta \iff MA = MB \iff |z - z_A| = |z - z_B|$$

Exercice 18 :

Soit z un nombre complexe différent de 1 et M son point image dans le plan complexe. On pose $Z = \frac{z+i}{z-1}$.
Déterminer l'ensemble :
- $\mathscr{E}$ des points M tel que $Z \in \mathbb{R}$.
- $\mathscr{F}$ des points M tel que $|Z| = 1$.
- $\mathscr{G}$ des points M tel que $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

Exercice 19 :

On désigne par I, A et B les points d'affixes respectives 1, $2i$ et $3+i$.

1. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.
2. Calculer l'affixe z_C du point C image de A par la symétrie de centre I.
3. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$
   En déduire le module et un argument de ce nombre ; ainsi qu'une interprétation géométrique.
4. Soit D le point d'affixe z_D telle que $z_D - z_C = z_A - z_B$, montrer que $ABCD$ est un carré.
5. Pour tout point M du plan, on considère le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$
   a. Exprimer $\vec{u}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MI}$
   b. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tel que : $||\vec{u}|| = 2||\overrightarrow{AB}||$.
   Construire Γ.

VI) Forme Exponentielle

VI-1 Une troisième écriture

Nous allons voir maintenant une troisième façon, fort commode, de noter les nombres complexes.
Soit z un nombre complexe de module r et d'argument θ, alors on a vu que :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Il s'agit ici de la forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Définition 6 :
Pour tout réel θ on note :

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Ainsi, tout nombre complexe z non nul, de module r et d'argument θ admet une écriture du type $z = re^{i\theta}$, appelée **forme exponentielle** de z.

Remarques :
- Cette écriture n'est pas unique puisqu'elle dépend de l'argument choisi.
- Cette notation n'est pas aléatoire. Elle pourra être justifiée dans le chapitre sur la fonction exponentielle.
- Pour l'instant, remarquons que cette écriture présente de nombreux avantages, en plus d'alléger la notation trigonométrique. En effet, considérons deux nombres complexes z et z' de module r et r' et d'argument θ et θ', alors on a vu que le module de zz' est rr' et l'argument de zz' est $\theta+\theta'$. Observons le calcul suivant :

$$zz' = re^{i\theta}r'e^{i\theta'} = rr'e^{i\theta+i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

  On retrouve donc le module et l'argument du nombre complexe zz' en utilisant les règles de calculs sur les puissances.
- $e^{i\theta}$ désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument θ : $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta[2\pi]$

Exemples :

$$e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$e^{2i\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \qquad e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2} = -i$$

Remarque : Le conjugué de $e^{i\theta}$ est $\overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos\theta + i\sin(-\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$

Exercice 20 **:**
Dans le plan complexe, placer les points suivants :

$$A\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \quad B\left(-2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \quad C\left(e^{-5i\frac{\pi}{6}}\right) \quad D\left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$$

Propriété 9 :
$\forall\theta$ et θ' de $\mathbb{R}$ on a :

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

Preuve

Simple transcription des propriétés vues sur les arguments.

Exercice 21 :

Soit $z = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z' = 5e^{i\frac{\pi}{12}}$, donner une forme exponentielle de zz' et de $\dfrac{z}{z'}$

Exercice 22 :

1. On note $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$. Déterminer les formes exponentielles de z_1 et z_2.

   En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $z = \dfrac{z_1^4}{z_2^3}$

2. Calculer $(1+i)^{14}$

VI-2 Utilisation en géométrie

Propriété 10 :

Dans le plan complexe, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r et un point M d'affixe z. Alors :

$$M(z) \in \mathscr{C} \iff z = \omega + re^{i\theta} \quad \text{avec} \theta \in [0;2\pi[$$

Preuve

On sait que $M(z) \in \mathscr{C} \iff M\Omega = r \iff |z - \omega| = r$.
On appelle θ la mesure principal $\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{\Omega M}\right)$. Alors : $M(z) \in \mathscr{C} \iff z - \omega = re^{i\theta}$.

Remarque : Cette égalité est appelée équation paramétrique du cercle $\mathscr{C}$.

Exemple :

L'ensemble des points d'affixes $z = 4i + 2 + 3e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0;2\pi[$ représente le cercle de centre $\Omega(4i+2)$ et de rayon 3.

VII) Transformations du plan

VII-1 Quelques transformations

Définition 7 :
On appelle homothétie de centre O et de rapport k ($k \neq 0$) la transformation pour laquelle un point M du plan a pour image M' tel que $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM'}$

Travail de l'élève : Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$. On considère :
– La translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}} = 2+i$
– L'homothétie h de centre A d'affixe $z_A = 2+4i$ et de rapport $k = -\dfrac{3}{2}$
– La rotation r de centre Ω d'affixe $\omega = 1-i$ et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

On considère un point M d'affixe z.

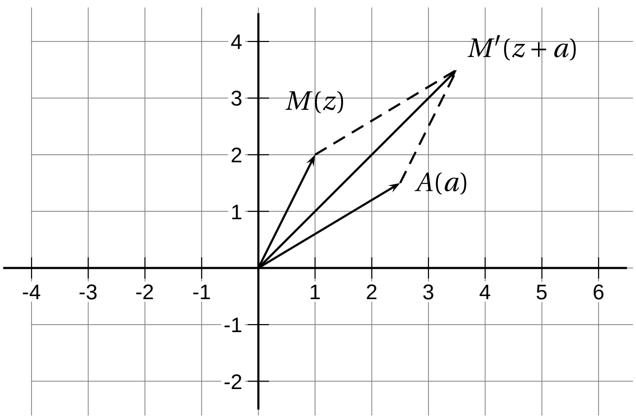
1. Soit $M_1(z_1)$ le point image de M par t.
   a. Donner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM_1}$.
   b. En déduire une expression de z_1 en fonction de z.
2. Soit $M_2(z_2)$ le point image de M par h.
   a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$.
   b. En déduire une expression de $z_2 - z_A$ en fonction de $z - z_A$, puis une de z_2 en fonction de z.
3. Soit $M_3(z_3)$ le point image de M par r.
   a. Comparer ΩM_3 et ΩM.
   b. Déterminer une mesure de $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M_3}\right)$.
   c. En déduire une écriture complexe $\dfrac{z_3-\omega}{z-\omega}$ en fonction de z.
   d. En déduire une expression de z_3 en fonction de z.
4. Utiliser les résultats précédents pour trouver les affixes des images par t, h et r du point O.

Théorème 6 :
La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}}$ transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que : $z' = z + z_{\vec{u}}$

Remarque : Ajouter un nombre a à une affixe, c'est translater d'un vecteur d'affixe a.

Preuve
On a $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff z' - z = z_{\vec{u}}$

Exemple :



Théorème 7 :
L'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

Remarque : Multiplier par un réel k c'est changer les proportions du facteur k

Preuve
On a $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Longleftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$

Théorème 8 :
La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

Remarque : Multiplier par un complexe $e^{i\theta}$ de module 1, c'est faire tourner d'un angle θ.

Preuve
Si $M = \Omega$, la relation $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ est triviale.

Supposons maintenant que $M \neq \Omega$. Alors : $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ [2\pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta\ [2\pi] \end{cases}$

On en déduit $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$.

Exemples :
La rotation qui associe à un nombre complexe z le nombre z' suivant :
– $z' = e^{i\theta} z$ est la rotation de centre O et d'angle θ
– $z' - 3 + i = i(z - 3 + i)$ est la rotation de centre $\Omega(3 - i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
– $z' = iz$ est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Remarque : ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si $z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$, puisque C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Méthode pour reconnaître un transformation
Lorsqu'on a une transformation f du plan dont l'écriture complexe est du type $z' = az + b$ $(a \neq 0)$, on commence par rechercher son éventuel point fixe.
– Si $a = 1$ et $b = 0$, alors f est l'identité (tous les points du plan sont fixes)
– Si $a = 1$ et $b \neq 0$, il n'y a pas de point fixe et f est une translation
– Si $a \neq 1$, il y a un unique point fixe d'affixe ω.
  Dans ce cas, on cherche à exprimer $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$.
  • Si $a \in \mathbb{R}$ alors f est une homothétie de rapport a et de centre ω
  • Si a est un complexe de module 1 $\left(a = e^{i\theta}\right)$, alors f est une rotation d'angle θ.

Exemple :

Soit f la transformation du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = -\frac{5}{2}z + 2i$.

– On résout $z = f(z) \Longleftrightarrow z = \frac{4}{7}i$.

La transformation f admet un unique point invariant Ω d'affixe $\omega = \frac{4}{7}i$.

– On exprime $z' - \omega$ en fonctino de $z - \omega$.

On a $\begin{cases} z' = -\frac{5}{2}z + 2i \\ \omega = -\frac{5}{2}\omega + 2i \end{cases} \Leftarrow z' - \omega = -\frac{5}{2}(z - \omega)$.

Donc f est une homothétie de centre $\Omega\left(\frac{4}{7}i\right)$ et de rapport $-\frac{5}{2}$

Exercice 23 :

Reconnaître les transformations du plan qui au point $M(z)$ associe le point $M_k(z_k)$ tel que :

$$z_1 = z - 3 + 2i \qquad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z \qquad z_3 = -z \qquad z_4 = 2(z-i)+i \qquad z_5 = -iz \qquad z_6 + 1 = iz + i$$

Exercice 24 :

Donner l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}(1;2)$, de l'homothétie de centre $A(-1+i)$ et de rapport 3, et de la rotation de centre $B(2-4i)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 25 :

Etant donnés $N(1+i)$ et $P(2-3i)$, déterminer les affixes des points M tels que MNP soit équilatéral.

Exercice 26 :

ABC est un triangle de sens direct. On construit le point P tel que $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AP}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $AP = BC$. On construit de même les points Q et R tels que $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BQ}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $BQ = CA$, et $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CR}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $CR = AB$.
Démontrer que le triangle PQR a le même centre de gravité que ABC.

VII-2 Lieux de points typiques

Soient A et B deux points distincts du plan.

– Ensemble des points M tels que $AM = k$, avec $k \in \mathbb{R}$:
  - Si $k > 0$: cercle de centre A et de rayon k
  - Si $k = 0$: point A
  - Si $k < 0$: Ensemble vide

– Ensemble des points M tels que $MA = MB$:
Médiatrice de $[AB]$

– Ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = 0\,[\pi]$:
Droite (AB) privée de A et B.

– Ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = 0\,[2\pi]$:
Droite (AB) privée du segment $[AB]$

– Ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = \pi\,[2\pi]$:
Segment $[AB]$

– Ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$:
Cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.

– Ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$:
Demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B et tel que MAB soit direct.

– Ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$:
Demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B et tel que MAB soit indirect.

– Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$:
Cercle de diamètre $[AB]$

Remarque : Un angle orienté n'est défini que si les deux vecteurs ne sont pas nuls. C'est pourquoi les points A et B doivent être retirés le cas échéant, des ensembles ci-dessus.

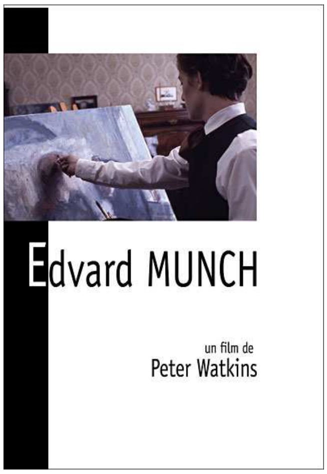
Enigme[4] : Trouver l'erreur dans le calcul suivant :

$$\begin{array}{rl} & e^{i2\pi} = 1 \\ \Longleftrightarrow & \left(e^{i2\pi}\right)^x = 1^x = 1 \\ \Longleftrightarrow & e^{i2\pi x} = 1 \\ \text{pour } x = \frac{1}{4} \text{ on obtient :} & e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 \\ \text{d'où :} & i = 1 \end{array}$$

4. Réponse : La relation $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ n'est valable que si $n \in \mathbb{Z}$

« " J'étais en train de marcher le long de la route avec deux amis - le soleil se couchait - soudain le ciel devint rouge sang – j'ai fait une pause, me sentant épuisé, et me suis appuyé contre la grille - il y avait du sang et des langues de feu au-dessus du fjord bleu-noir et de la ville - mes amis ont continué à marcher, et je suis resté là tremblant d'anxiété - et j'ai entendu un cri infini déchirer la Nature" »

MUNCH, Edvard



Edvard Munch - Das kranke Mädchen [The Sick Girl]
© Munch Museum/Munch-Ellingsen Group, BONO, Oslo/DACS, London 2004

Dans l'ordre :

– *Le cri* (1893)
– *L'enfant malade* (1885-86)
– *?*
– *Film de Peter Watkins* (1973)
– *Le vampire* (1893-95)

Annexe : Construction du corps des nombres complexes (Hors programme)

Faute d'outils plus rigoureux [5] on vous a présenté l'ensemble des nombres réels comme étant les abscisses des points d'une droite graduée. Additionner et multiplier des réels, c'est donc comme « compter en dimension 1 ».
Vous utilisez depuis l'école primaire ces nombres et leurs opérations usuelles associées, addition et multiplication sans trop vous poser de questions. Mais elles vérifient les propriétés particulières suivantes : [6] :
Pour tous réels x, y et z :

- L'addition est associative : $x+y+z=(x+y)+z=x+(y+z)$ et commutative $x+y=y+x$
- L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x+0=0+x=x$
- La somme de deux réels est encore un réel.
- Chaque élément x admet un opposé noté $-x$ vérifiant $x+(-x)=(-x)+x=0$
- La multiplication est associative
- La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x\times 1=1\times x=x$
- Le produit de deux réels est encore un réel.
- Chaque réel $x\neq 0$ admet un inverse noté x^{-1} vérifiant $x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1$
- La multiplication est distributive sur l'addition $x(y+z)=x\times y+x\times z$

Tout ceci est bien naturel et bien pratique pour compter. Maintenant, on voudrait faire le même travail en dimension 2 i.e pouvoir calculer avec des couples de nombres du style $(x;y)$.

On note l'ensemble de ces couples $\mathbb{R}^2$, et on souhaite définir des opérations de manière à faire de $\mathbb{R}^2$ un corps. On définit alors l'addition comme suit :

$$(x;y)+(x';y')=(x+x';y+y')$$

On vérifie aisément que cette opération est associative, commutative, admet un élément neutre $(0;0)$, la somme de deux éléments de $\mathbb{R}^2$ est encore un élément de $\mathbb{R}^2$ et tout élément $(x;y)$ admet un opposé $(-x;-y)$.

Définissons maintenant la multiplication ! On a envie de la définir de la manière suivante :

$$(x,y)\times(x';y')=(xx';yy') \qquad \text{avec } (1;1) \text{ comme élément neutre}$$

<u>Problème :</u> L'inverse de $(x;y)$ est $\left(\frac{1}{x};\frac{1}{y}\right)$ ce qui veut dire tous les couples du type $(x;0)$ avec $x\neq 0$ n'admettent pas d'inverse. Or on voudrait que seul le couple $(0;0)$ n'admettent pas d'inverse. Il faut donc changer de définition...

On décide d'adopter la définition suivante, moins naturelle :

$$(x;y)\times(x';y')=(xx'-yy';xy'+x'y)$$

On vérifie aisément que cette opération est associative, admet un élément neutre $(1;0)$, le produit de deux éléments de $\mathbb{R}^2$ est encore un élément de $\mathbb{R}^2$ et tout élément $(x;y)\neq(0;0)$ admet un inverse. Nous voici donc avec un nouveau corps.

Il est temps d'établir le lien entre $\sqrt{-1}$ et $\mathbb{R}^2$ tel qu'on l'a construit. On remarque que :

$$(0;1)^2=(0;1)\times(0;1)=(0-1;0+0)=(-1;0)$$

$(0,1)$ est alors le nombre que l'on a noté i, et $(-1;0)$ c'est -1, et on a alors $i^2=-1$.

5. Vous les verrez peut-être un jour... En général on définit un nombre réel comme étant la limite d'une suite d'approximations par des rationnels.

6. Lorsque un ensemble possède ces propriétés et quelques autres, on dit que c'est un corps. Certains de vos parents ont étudié la notion de corps en classe de $4^{ème}$, cette étude se fait désormais après le lycée... $\mathbb{Q}$ est aussi un corps mais ce n'est pas le cas de $\mathbb{Z}$ ni de $\mathbb{N}$ (pas d'inverse pour la multiplication)

Pour mieux comprendre, imaginons l'ensemble des réels comme une droite graduée (ici représenté par l'axe des absisses), ajoutons-y un axe des ordonnées pour passer en dimension 2, alors le réel -1 est associé au point de coordonnées $(-1;0)$, et le nombre dont la racine carré est -1 est lui associé au point de coordonnée $(1;0)$. Nous notons $i=\sqrt{-1}$ pour qu'il fasse moins peur. On remarque qu'en particulier, tous les nombres réels sont des nombres complexes : $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.
Ainsi nous avons les correspondances

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Le point M} & \longleftrightarrow & \text{Le couple } (x,y) & \longleftrightarrow & \text{Le nombre complexe } x+iy \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{Le plan } \mathscr{P} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longleftrightarrow & \text{L'ensemble des nombres complexes}
\end{array}$$

L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$. La multiplication n'était pas naturelle dans $\mathbb{R}^2$, mais observez comme les calculs deviennent faciles dans $\mathbb{C}$ (pourtant équivalent) avec la règle $i^2=-1$ et en prolongeant les règles de de calcul $\mathbb{R}$.

$$(x+iy)+(x'+iy')=x+iy+x'+iy'=(x+x')+i(y+y')$$

comme nous avions $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$.
Et $(x+iy)\cdot(x'+iy')=xx'+ixy'+iyx'+i^2yy'$ mais n'oubliez pas que $i^2=-1$. Alors

$$(x+iy)\cdot(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+yx')$$

comme nous avions $(x,y)\times(x',y')=(xx'-yy',xy'+yx')$, mais en plus simple.

Dans ce chapitre, nous avons découvert ces nouveaux nombres et associer à chacun de ces nombres un point du plan, donc associer des transformations du plan à des calculs dans $\mathbb{C}$. Tout ceci nous permet de résoudre des problèmes de géométrie par le calcul, ce que nous approfondiront dans un deuxième chapitre...