EXERCICES : ANNALES COMPLEXES 1/2

Exercice 1. (5 points)

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On pose $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ où x, x', y et y' désignent des nombres réels.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\Re e(z'\overline{z}) = 0$

2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si, et seulement si, $\Im m(z'\overline{z}) = 0$

Applications :

3. N est le point d'affixe z^2-1. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux ?

4. On suppose z non nul. P est le point d'affixe $\dfrac{1}{z^2}-1$.
On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.

- **a.** Montrer que $\left(\dfrac{1}{z^2}-1\right)\overline{\left(z^2-1\right)} = -\overline{z}^2\left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2$
- **b.** En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble cherché.

Exercice 2. (5 points)

Soient les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2}+i\sqrt{6} \qquad z_2 = 2+2i \qquad Z = \frac{z_1}{z_2}$$

1. Ecrire Z sous forme algébrique.

2. Donner les modules et arguments de z_1 , z_2 et Z

3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

4. Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z. Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).

5. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007}.

Exercice 3. (4 points)

Le plan complexe est rapport au un repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ (unité graphique :4 cm).
M est un point d'affixe z non nul. On désigne par M' le point d'affixe z' telle que

$$z' = -\frac{1}{\overline{z}}.$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

A - Quelques propriétés

1. Soit z un nombre complexe non nul. Déterminer une relation entre les modules de z et z' puis une relation entre les arguments de z et z'.
2. Démontrer que les points O, M et M' sont alignés.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul on a l'égalité : $\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$.

B - Construction de l'image d'un point

On désigne par A et B les deux points d'affixes respectives 1 et -1.
On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z-1| = 1$.

1. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{C}$? *(on donnera ses éléments caractéristiques)*
2. Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'affixe z, distinct du point O.
   a. Démontrer que $\left|z'+1\right| = \left|z'\right|$. Interpréter géométriquement cette égalité.
   b. Est-il vrai que si z' vérifie l'égalité : $\left|z'+1\right| = \left|z'\right|$, alors z vérifie l'égalité : $|z-1| = 1$?
3. Tracer l'ensemble $\mathscr{C}$ sur une figure. Si M est un point de $\mathscr{C}$, décrire et réaliser la construction du point M'.

Exercice 4. (2 points)

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.
   On considère trois points A, B et C deux deux distincts, d'affixes respectives a, b et c, tels que $\frac{c-a}{b-a} = 2\text{i}$.
   Affirmation : A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{-10}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de z.
   Affirmation : Il existe un point M tel que O, M et M' ne sont pas alignés.

Exercice 5. En devoir maison (5 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b, c.
On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C. On rappelle que $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(b-a)\ [2\pi]$.
Montrer que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi]$.

Partie B Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On considère le point A d'affixe $1+i$. On associe, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{z-1-i}{z}$$

Le point M' est appelé le point image du point M.

1. **a.** Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point B', image du point B d'affixe i.
   b. Montrer que, pour tout point M du plan d'affixe z non nulle, l'affixe z' du point M' est telle que $z' \neq 1$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est telle que $|z'| = 1$.
3. Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est un nombre réel ?

Exercice 6. En devoir maison (5 points)

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et (-2) et on définit l'application f qui tout point M d'affixe z et différent de A associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2}.$$

1. **a.** Déterminer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $(1+\mathrm{i})$.
   b. Montrer que les droites (AP) et (BP') sont parallèles.
   c. Etablir que les droites (AP) et (PP') sont perpendiculaires.
2. Determiner l'ensemble des points invariants par f (c'est-à-dire l'ensemble des points tels que $M' = M$).
   On cherche à généraliser les propriétés **1.b** et **1.c** pour obtenir une construction de l'image M' d'un point M quelconque du plan.
3. **a.** Montrer que pour tout nombre complexe z, le nombre $(z-2)\left(\overline{z}-2\right)$ est réel.
   b. En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel.
   c. Montrer que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit M un point quelconque non situé sur la droite (AB). Généraliser les résultats de la question **1.c**.
5. Soit M un point distinct de A. Déduire des questions précèdentes une construction du point M' image de M par f. Réaliser une figure pour le point Q d'affixe $3-2\mathrm{i}$.