Chapitre 11

Représentation de droites et de plans

Hors Sujet

Titre : « Label : Musique electronique »

Auteur : Steve Beckett et Rob Mitchell

Présentation succinte de l'auteur : Warp Records est un label musical britannique indépendant, fondé en 1989 à Sheffield, en Yorkshire, connu pour avoir découvert un certain nombre d'artistes de musique électronique. Warp Records tire son origine d'un magasin de musique électronique installé en 1987 dans un hangar désaffecté. Le label Warp Records (Warp pour Weird And Radical Projects ou encore We Are Reasonable People selon d'autres sources) a été créé par Steve Beckett et Rob Mitchell en 1989.

Warp Records poursuivit en publiant à partir de 1992 une série de singles et d'albums sous le titre Artificial Intelligence, des productions d'artistes comme Aphex Twin (sous les pseudonymes Diceman et Polygon Window), Autechre, Black Dog Productions, Richie Hawtin et Alex Paterson (qui rejoindra plus tard The Orb). Depuis, le label a évolué et les derniers artistes en date forment un groupe éclectique. À la fin des années 1990, Warp Records s'est déplacé à Londres. En janvier 2004, le label a lancé un magasin de musique en ligne, Bleep.com, notable pour être l'un des seuls labels à éviter totalement l'utilisation de gestion numérique des droits dans les pistes en téléchargement. En une quinzaine d'années, Warp Records a eu une grande influence sur la musique électronique expérimentale. Le label a développé, à l'instar de quelques prédécesseurs comme Factory Records, Mute Records ou encore Sarah Records, une identité visuelle reconnaissable et forte, accentuée par le soin apporté aux vidéo-clips de ses artistes, qui ont contribué à le faire connaître.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

LEÇON 11

Représentation de droites et de plans

Résumé

Ce chapitre est une prolongation du précédent. Grâce aux équations cartésiennes de plan et au calcul vectoriel, nous allons pouvoir caractériser d'une autre manière les plans (ce qui peut parfois s'avérer pratique) et surtout les droites, qui pour l'instant sont définies comme intersection de plans et donc déterminées par un système d'équation.

De plus, nous étendrons à l'espace les propriétés rencontrées sur le barycentre dans le plan, ce qui nous permmettra de caractériser les droites, les segments, les plans et les triangles de l'espace.

Dans tout le chapitre, on munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

I) Caractérisations paramétriques

I-1 Représentations paramétriques de droites

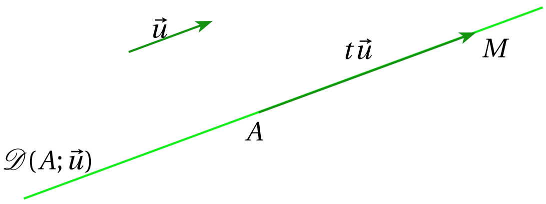
Propriété-Définition

La droite $\mathscr{D}(A;\vec{u})$ passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$ est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Ceci équivaut à

$$\begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \\ z = \gamma t + z_A \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Ce système est appelé une représentation paramétrique de la droite $D(A;\vec{u})$. On dit que t est le paramètre.



En effet :

$$M(x;y;z) \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{AM} = t\vec{u}, \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases}, \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}, \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Exemple :

La droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t+3 \\ z = -4 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, est la droite passant par le point $A(1;3;-4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-1;0)$

Remarques :

- On peut visualiser une droite comme une route rectiligne parcourue en voiture. La représentation paramétrique nous donne la position de la voiture en fonction du temps t (possiblement négatif ici).
- Pour ne caractériser qu'une demi-droite, il suffit de limiter les valeurs du paramètre t à $[0;\infty[$ ou $]-\infty;0]$ (en fonction de l'orientation.
- Pour ne caractériser qu'un segment, on limitera aussi les valeurs de t en fonction des extrémités.

Exemple :

Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(-1;2;-3)$ et $B(1;-1;1)$.

***Solution* :**

Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est par exemple le vecteur $\overrightarrow{AB}(2;-3;4)$, ce qui donne par conséquent :

$$M(x;y;z) \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x+1 = 2t \\ y-2 = -3t \\ z+3 = 4t \end{cases}, \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -3t+2 \\ z = 4t-3 \end{cases}, \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

I-2 Systèmes et Intersection dans l'espace

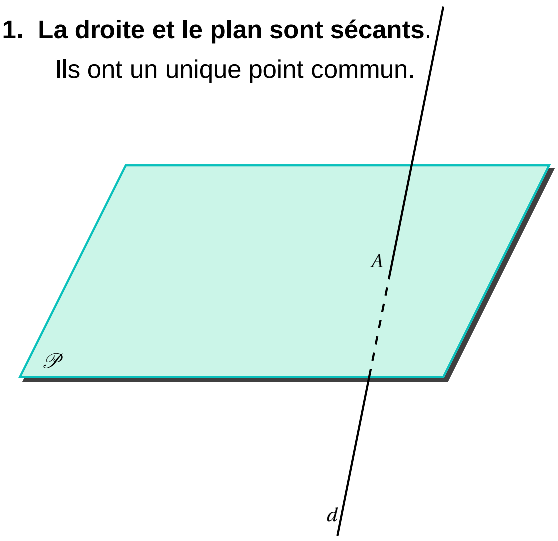
I-2.1 Intersection d'une droite et d'un plan

Considérons un plan P d'équation $ax+by+cz+d=0$ et une droite d dont on connaît une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Il n'existe que deux possibilités :

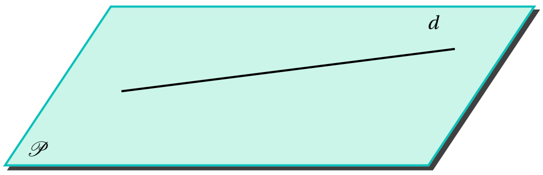
1. **La droite et le plan sont sécants**.
   Ils ont un unique point commun.



2. La droite et le plan sont parallèles.

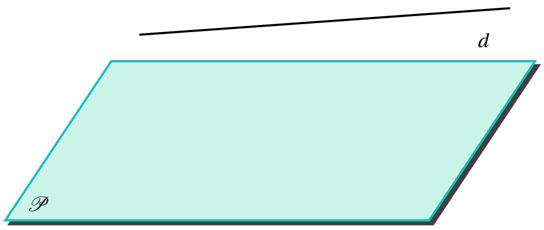
a. La droite est incluse dans le plan.

Ils ont une infinité de points communs.



b. La droite est strictement parallèle au plan.

Ils n'ont aucun point commun



Dans le deuxième cas, le vecteur directeur de d est orthogonal au vecteur normal de $\mathscr{P}$, ce qui est facile à montrer grâce au produit scalaire.
Pour différencier les sous-cas, on choisit un point de d. Si ce point vérifie l'équation de $\mathscr{P}$ alors la droite est incluse dans le plan, sinon elle est parallèle strictement au plan.

C'est le premier cas qui nous intéresse, donc quand $\vec{n}(a;b;c)$ et $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ ne sont pas orthogonaux. On cherchera alors les coordonnées du point d'intersection A de $\mathscr{P}$ et d.

Pour cela, il suffit de résoudre le système suivant (d'inconnue t) : $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ x=\alpha t+x_0 \\ y=\beta t+y_0 \\ z=\gamma t+z_0 \end{cases}$

Ce qui revient à résoudre :

$$a(\alpha t+x_0)+b(\beta t+y_0)+c(\gamma t+z_0)=0 \iff t(a\alpha+b\beta+c\gamma)=-x_0-y_0-z_0$$

Comme on a supposé $\vec{n}\cdot\vec{u}\neq 0$, on peut diviser par $a\alpha+b\beta+c\gamma\neq 0$ et on obtient :

$$t=\frac{-x_0-y_0-z_0}{a\alpha+b\beta+c\gamma}$$

Finalement, en remplaçant dans le système de représentation paramétrique de d, on trouve les coordonnées de A. Mais observons sur un exemple....

Exemple :

Soit $P: 2x-z=0$ et $d: \begin{cases} x=t-1 \\ y=-3t \\ z=2 \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$.

Déterminer les coordonnées du point $A=P\cap d$.

Solution **:**

Soit $\vec{n}(2;0;-1)$ un vecteur normal de P et $\vec{u}(1;-3;0)$ un vecteur directeur de d, assurons nous que le point A existe :

$$\vec{n}\cdot\vec{u}=2\neq 0$$

Par conséquent A existe nous pouvons déterminer ces coordonnées, en résolvant l'équation suivante :

$$2(t-1)-2=0 \iff 2t-2-2=0 \iff t=2$$

Ainsi, en remplaçant dans le système paramétrique de d on obtient $A(2-1;-3\times 2;2)$ i.e $A(1;-6;2)$.

I-2.2 Intersection de deux droites

Travail de l'élève **1.** Considérons les droites $(d_1)\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-3 \\ z = -t+2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, et $(d_2)\begin{cases} x = 3t+2 \\ y = -t-1 \\ z = t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

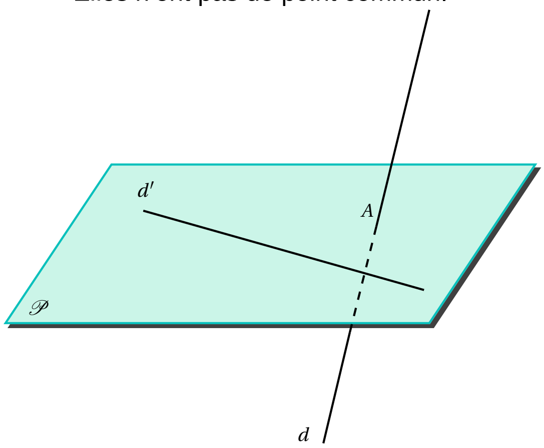
Etudier l'intersection des deux droites si elle existe.
Attention, le paramètre t parcourt $\mathbb{R}$ pour chacune des droites. Mais à abscisse égale, il n'a pas forcémenet la même valeur. Rappelez-vous les voitures ! Des routes peuvent se croiser sans pour autant que les voitures y soient au même instant...
Pour résoudre le système, prenez l'habitude de lui donner un nom différent.

On donne deux droites d et d' dont on connaît les représentations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad d' : \begin{cases} x = \alpha' t' + x_1 \\ y = \beta' t' + y_1 \\ z = \gamma' t' + z_1 \end{cases} \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}$$

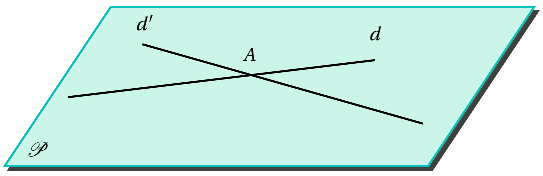
Il n'existe que deux possibilités :

1. Les droites sont non coplanaires.
Il n'existe aucun plan contenant ces deux droites.
Elles n'ont pas de point commun.

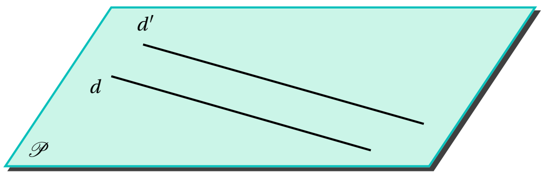


2. Les droites sont coplanaires.
Il existe un plan contenant ces deux droites.

a. Les droites sont sécantes.
Elles ont un unique point commun.



b. Les droites sont parallèles.
Elles n'ont pas de point commun.



Les éventuels points d'intersections de d et d' sont les solutions du système d'inconnues t et t' :

$$\begin{cases} \alpha t + x_0 = \alpha' t' + x_1 \\ \beta t + y_0 = \beta' t' + y_1 \\ \gamma t + z_0 = \gamma' t' + z_1 \end{cases}$$

Exemple :

On donne $A(1;-1;0)$, $B(0;-1;1)$, $C(3;-2;0)$ et $D(2;-3;3)$. Etudier l'intersection des droites (AB) et (CD).

Solution **:**

$\overrightarrow{AB}(-1;0;1)$ est un vecteur directeur de (AB) par conséquent la droite (AB) admet la représentation paramétrique suivante :

$$(AB) : \begin{cases} x = -t+1 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$\overrightarrow{CD}(-1;-1:3)$ est un vecteur directeur de (CD) par conséquent la droite (CD) admet la représentation paramétrique suivante :

$$(CD) : \begin{cases} x = -t'+3 \\ y = -t'-2 \\ z = 3t' \end{cases} \qquad t' \in \mathbb{R}$$

On résout le système : $\begin{cases} -t+1 = -t'+3 \\ -1 = -t'-2 \\ t = 3t' \end{cases} \iff \begin{cases} -t = -t'+2 \\ t' = -1 \\ t = 3t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = -3 \\ t' = -1 \\ t = -3 \end{cases}$

La troisième équation est compatible avec les deux premières, nous pouvons donc affirmer :

1. le système admet une solution, donc les droites ont une intersection non vide, elles sont coplanaires.
2. Le système admet une unique solution qui est le couple $(t;t') = (-3;-1)$ donc les droites sont sécantes en un point A, dont on obtient les coordonnées en remplaçant t ou t' dans l'une des représentations paramétriques de d ou d' :

$$A(4;-1;-3)$$

I-2.3 Intersection de deux plans

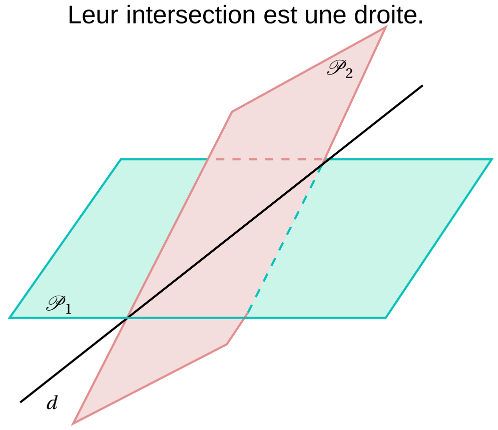
On considère deux plans sécants P et Q d'équations cartésiennes respectives :

$$P : ax+by+cz+d = 0 \qquad \text{et} \qquad Q : a'x+b'y+c'z+d' = 0$$

Il n'existe que deux possibilités :

1. **Les plans sont sécants.**

Leur intersection est une droite.

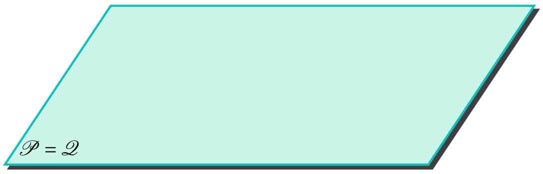


Remarque : Ainsi deux plans distincts qui dont on connait deux points communs sont sécants suivant la droite définie par ces deux points.

2. Les plans sont parallèles.

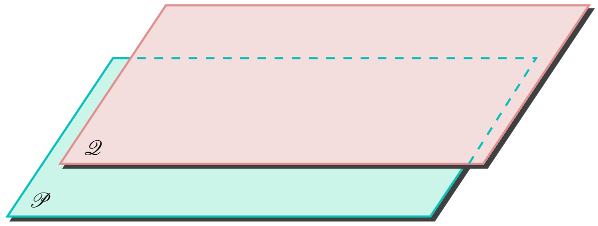
a. Les plans sont confondus.

Ils ont une infinité de points communs.



b. Les plans sont strictement parallèles.

Ils n'ont aucun point commun.



Les deux derniers cas ont déjà été évoqués au chapitre précédent.
Attardons-nous alors sur le premier cas. Lorsque les deux plans sont sécants, leur intersection est une droite d. On peut trouver sa représentation paramétrique en utilisant l'une des trois coordonnées comme paramètre et en résolvant le système

$$\begin{cases} ax + by + cx + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Exemple :

Considérons les plans P et Q d'équations respectives :

$$P : 2x + y - z - 2 = 0 \qquad \text{et} \qquad Q : x + 3y + 7z - 11 = 0$$

1. Etudier la position relative de ces plans.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d, intersection de ces deux plans .

***Solution* :**

1. $\vec{n}(2;1;-1)$ est un vecteur normal de P et $\overrightarrow{n'}(1;3;7)$ est un vecteur normal de Q.
   Or $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, puisque leurs coordonnées de $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont clairement pas proportionnelles. Donc P et Q sont deux plans sécants.
2. On doit résoudre : $\begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y + 7z - 11 = 0 \end{cases}$
   On pose par exemple $x = t$ et on ne le considère plus comme une inconnue. On a alors Comme $2t + y - z - 2 = 0 \Longrightarrow y = -2t + z + 2$, ainsi :

   $$t + 3(-2t + z + 2) + 7z - 11 = 0 \Longleftrightarrow -5t + 10z - 5 = 0 \Longleftrightarrow z = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$$

   On remplace dans y et on a :

   $$y = -2t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} + 2 = -\frac{3}{2}t + \frac{3}{2}$$

   On obtient une représentation paramétrique de d :

   $$d : \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{3}{2}t + \frac{3}{2} \\ z = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

I-2.4 Intersection de trois plans

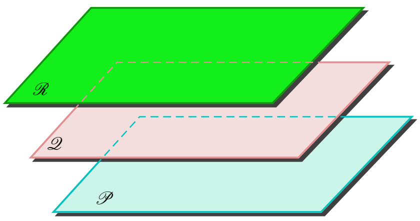
On considère trois plans P, Q et R dont on connaît une équation cartésienne :

$$P : ax + by + cz + d = 0 \quad \text{ou} \quad Q : a'x + b'y + c'z + d' = 0 \quad \text{ou} \quad R : a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

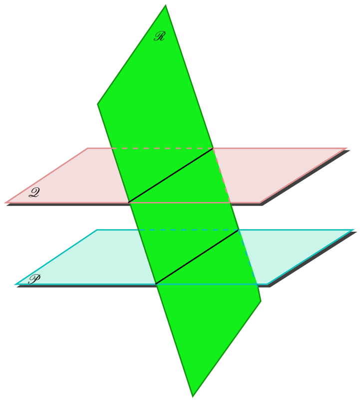
Il n'existe que deux possibilités :

1. Les plans n'ont pas de point commun.

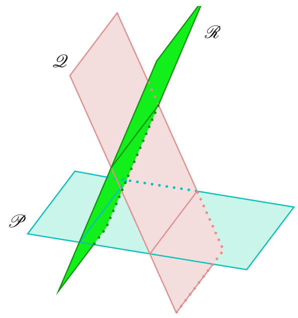
a. Les trois plans sont parallèles deux à deux, dont au moins deux strictement.



b. Deux plans sont strictement parallèles.

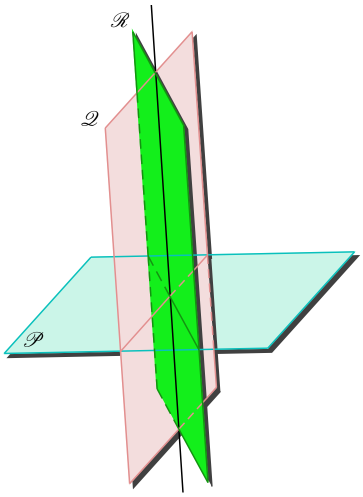


c. Les trois plans sont sécants deux à deux suivants trois droites strictement parallèles.

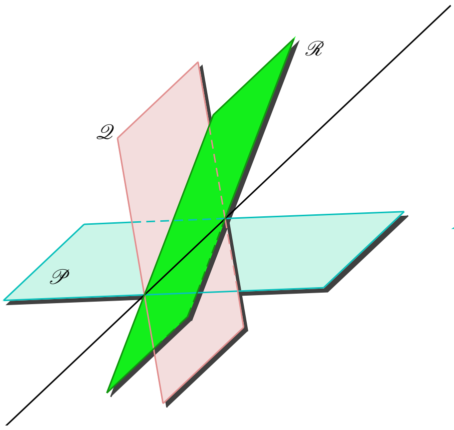


2. Les plans ont au moins un point commun

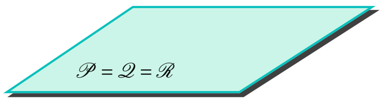
a. L'intersection est un point.



b. L'intersection est une droite.



c. Les trois plans sont confondus.



Le principe est le même que précédemment. On résout un système (3×3 cette fois).
S'il n'y a pas de solution, les plans n'ont pas d'intersection.
On distingue les sous-cas en étudiant la colinéarité des vecteurs normaux des plans.
S'il y a une unique solution, alors les plan sont sécants en un point.
Si deux équations sont équivalentes, alors on est ramené au cas de l'intersection de deux plans : l'intersection est une droite.
Si les trois équations sont équivalentes, les trois plans sont confondus.

Exemple :
Déterminer l'intersection des plans P, Q et R avec :

$$P : 2x - y + z - 7 = 0 \quad \text{ou} \quad Q : x + 2y - z - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad R : -x + y + 2z - 11 = 0$$

Exemple :
Déterminer l'intersection des plans P, Q et R avec :

$$P : 2x + 3y - 2z - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad Q : 4x - 3y + z - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad R : 2x + 12y - 7z - 2 = 0$$

***Solution* :**
Si $M(x; y; z)$ appartient à l'intersection des trois plans alors x, y et z vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 2 \\ 4x - 3y + z = 4 \\ 2x + 12y - 7z = 2 \end{cases}$$

De la deuxième équation on tire : $z = 4 - 4x + 3y$ et en reportant dans les équations 1 et 3 on obtient :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2(4 - 4x + 3y) = 2 \\ 2x + 12y - 7(4 - 4x + 3y) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x - 3y - 10 = 0 \\ 30x - 9y - 30 = 0 \end{cases}$$

On constate alors qu'il suffit de multiplier la première par 3 pour obtenir la deuxième, donc ces deux équations se résument à une seule :

$$x = \frac{3}{10}y + 1$$

Posons alors $y = 10t$ (avec t réel), d'où $x = 3t + 1$ et $z = 18t$.
Ainsi, les solutions du système sont les triplets x, y, z tels que :

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 10t \\ z = 18t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Il s'agit de la représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}(A; \vec{u})$ avec $A(1; 0; 0)$ et $\vec{u}(3; 10; 18)$.

II) Caractérisation à l'aide du barycentre

Les résultats établis ci-dessous sont valables aussi bien en géométrie plane qu'en géométrie dans l'espace. Aussi, nous ne préciserons pas si les points considérés appartiennent au plan ou à l'espace (sauf lorsque nous passerons aux coordonnées).

II-1 Définition, existence et unicité du barycentre

Théorème 1 :
Soient $A_1,\ A_2$..., A_n n points distincts du plan ou de l'espace. Soient $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ n réels tels que $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n\neq 0$, alors on appelle barycentre des points $A_1,\ A_2$..., A_n affectés des coefficients $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ l'unique point G vérifiant :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\dots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$$

Preuve
On a :

$$\begin{aligned}
& \alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\dots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}\\
\iff\ & \alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{A_1A_2}+\dots+\alpha_n\overrightarrow{GA_1}+\alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}=\vec{0}\\
\iff\ & (\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)\overrightarrow{GA_1}=\alpha_2\overrightarrow{A_2A_1}+\alpha_3\overrightarrow{A_3A_1}+\dots+\alpha_n\overrightarrow{A_nA_1}\\
\iff\ & \overrightarrow{GA_1}=\frac{\alpha_2\overrightarrow{A_2A_1}+\alpha_3\overrightarrow{A_3A_1}+\dots+\alpha_n\overrightarrow{A_nA_1}}{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}
\end{aligned}$$

Or, nous savons qu'étant donné un point A_1 et un vecteur $\vec{v}$[a], il existe un unique point G tel que

$$\overrightarrow{A_1G}=\vec{v}$$

Ainsi G existe et est unique.

a. Ici $\vec{v}=\dfrac{\alpha_2\overrightarrow{A_1A_2}+\alpha_3\overrightarrow{A_1A_3}+\dots+\alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}}{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}$

. **Remarques :**

– On note usuellement : $G=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_1 & A_2 & \dots & A_n\\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\\ \hline\end{array}$

– Lorsque $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n$ on dit que G est l'isobarycentre (ou centre de gravité) des points A_1 ; A_2 ; ... ; A_n.
  – L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment $[AB]$.
  – L'isobarycentre de trois points A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC (i.e le point d'intersection des médianes).

II-2 Réduction d'une somme vectorielle

Soit M un point quelconque du plan ou de l'espace, on cherche à simplifier :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$$

Notons $m=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$.

<u>1^er cas</u> : $m\neq 0$.

Dans ce cas on sait que le barycentre $G=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_1 & A_2 & \dots & A_n\\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\\ \hline\end{array}$ existe et est unique.

On a :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_i})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MG}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MG}=m\overrightarrow{MG}$$

Théorème 2 :

On considère $G = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \hline\end{array}$ $(m \neq 0)$), alors pour tout point M du plan ou de l'espace, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = m\overrightarrow{MG}$$

2ème cas : $m = 0$.

Dans ce cas le barycentre G n'existe pas, cependant, pour tout point N du plan ou de l'espace on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MN} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{NA_i} = 0 \times \overrightarrow{MN} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{NA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{NA_i}$$

Au final la somme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est indépendante du point M et représente toujours le même vecteur.

Remarque : Les résultats précédents sont remarquables dans le sens où ils permettent de réduire une somme de n vecteurs à un seul vecteur, ce qui facilite, par exemple, la recherche de lieux géométriques comme l'illustre l'exercice suivant.

Exercice 1 **:**

$ABCD$ est un carré. Déterminer les lieux géométriques suivants :

1. $\mathscr{E} = \left\{ M \text{ tels que } \left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = AB \right\}$
2. $\mathscr{E}' = \left\{ M \text{ tels que } 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \text{ et } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \text{ soient colinéaires.} \right\}$
3. $\mathscr{E}'' = \left\{ M \text{ tels que } \left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right\| \right\}$

Solution **:**

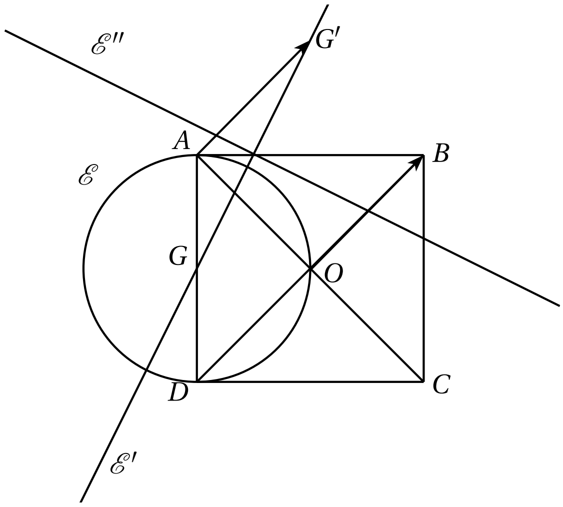
1. Notons : $G = \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & -1 & 1 \\ \hline\end{array}$

   On a alors :
   $$\left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 2\overrightarrow{MG} \right\|$$
   Et on cherche donc l'ensemble des points M tels que :
   $$MG = \frac{AB}{2}$$
   Il s'agit du cercle de centre G et de rayon $\dfrac{AB}{2}$.

2. En notant $G = \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ \hline\end{array}$

   On a alors $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG'}$, ainsi on cherche M tels que :
   $$\overrightarrow{MG} = k\overrightarrow{MG'}$$
   Il s'agit donc de la droite (GG').

3. Enfin on cherche M tel que : $MG = MG'$, ainsi l'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[GG']$.



II-3 Propriétés du barycentre

Propriété 1 : *Homogénéité*

Le barycentre reste inchangé si l'on remplace les coefficients par des coefficients proportionnels non nuls.

Preuve

Si $k \neq 0$ et alors :

$$G = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \hline \end{array} \iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^{n} k\alpha_i \overrightarrow{GA_i} \iff G = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \hline k\alpha_1 & k\alpha_2 & \dots & k\alpha_n \\ \hline \end{array}$$

Propriété 2 : *Associativité*

On ne change pas le barycentre de plusieurs points en remplaçant certains d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme (non nulle) des coefficients correspondants.

Exemple :

$G = bar\{(A,1),(B,2),(C,3)\} = bar\{(G',3),(C,3)\}$ où $G' = bar\{(A,1),(B,2)\}$.

Et finalement, on s'aperçoit que G est le milieu de $[G'C]$.

Preuve

Soit $G = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \hline\end{array}$ et $G' = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_1 & A_2 & \dots & A_p \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \\ \hline\end{array}$ avec $p \leq n$ et $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, $m' = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \neq 0$.

On a donc, pour tout point M du plan ou de l'espace :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = m\overrightarrow{MG} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = m'\overrightarrow{MG'}$$

On souhaite montrer que $G = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline G' & A_{p+1} & \dots & A_n \\ \hline m' & \alpha_{p+1} & \dots & \alpha_n \\ \hline\end{array}$ i.e que $m\overrightarrow{GG'} + \sum_{i=p+1}^{n} \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Or, :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \Longleftrightarrow m\overrightarrow{MG} = m'\overrightarrow{MG'} + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

Ce qui donne pour $M = G$:

$$\vec{0} = m\overrightarrow{GG'} + \sum_{i=p+1}^{n} \overrightarrow{GA_i}$$

Exercice 2 :

$ABCD$ est un tétraèdre et $G = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 4 \\ \hline\end{array}$

Situer G.

II-4 Coordonnées

On sait que pour point M du plan ou de l'espace, si $G = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 4 \\ \hline\end{array}$ alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = m\overrightarrow{MG}$$

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pour $M = O$, il vient :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}}{m}$$

On utilise cette relation pour déterminer les coordonnées du barycentre, coordonnées qui représentent les moyenne pondérées des coordonnées des points du système.

Exercice 3 :

On donne $A(1;0;-1)$, $B(2;1;1)$ et $C(0;2;3)$. Calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.

Solution :

$G = $

A	B	C
1	1	1

par conséquent :

$$G\left(\frac{1+2+0}{3};\frac{0+1+2}{3};\frac{-1+1+3}{3}\right)$$

i.e

$$G(1;1;1)$$

II-5 Lien entre le barycentre et les droites et les plans

Théorème 3 :
Soient A et B deux points distincts. On considère le système $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ avec $\alpha+\beta \neq 0$.

1. Le barycentre G de $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ est situé sur la droite (AB).
2. La droite (AB) est l'ensemble des barycentres du système $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$.

Preuve

1. $G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ donc
$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
Par conséquent (en utilisant la relation de Chasles :
$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$
ce qui montre que $G \in (AB)$
2. Soit M un point de la droite (AB), dans ce cas les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinaires, par conséquent il existe un réel k tel que :
$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AM}-k\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MB}=\vec{0} \iff (k-1)\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
Comme $k-1-1\neq 0$, il vient : $M = bar\{(A,k-1),(B,-1)\}$

Théorème 4 :
Soient A, B et C trois points non alignés (et a fortiori distincts deux à deux). On considère le système $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

1. Le barycentre G de $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ est situé dans le plan (ABC).
2. Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres du système $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$

Preuve

1. Comme $G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ on a :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

En utilisant la relation de Chasles on trouve :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc coplanaires donc $G \in (ABC)$

2. Soit M un point quelconque du plan (ABC). Montrons que M est un certain barycentre de A, B et C. Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires, donc il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \Longleftrightarrow (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{BM} + \mu\overrightarrow{CM} = \vec{0} \Longleftrightarrow M = bar\{(A,1-\lambda-\mu),(B,\lambda),(C,\mu)\}$$

Théorème 5 :
Le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres A et B à coefficients positifs. De même l'intérieur d'un triangle ABC est l'ensemble des barycentres de A, B et C à coefficients strictement positifs.

Preuve

Démontrons le premier résultat.
Si $\alpha = 0$ alors $G = B$, dans le cas contraire si donc $\alpha \neq 0$, on a :

$$G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta)\} \Longleftrightarrow G = bar\left\{(A,1),\left(B,\frac{\beta}{\alpha}\right)\right\}$$

Ainsi :

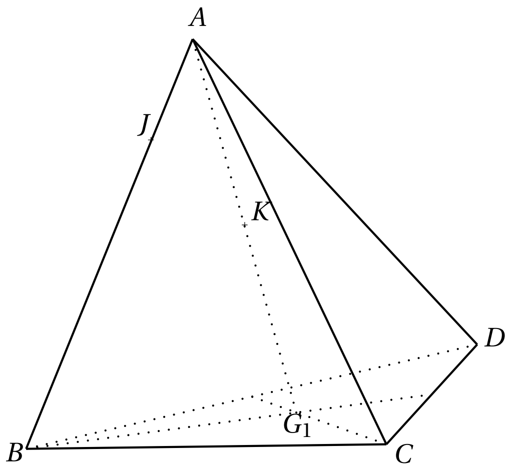
$$\overrightarrow{GA} + \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{GB}$$

Si $\dfrac{\beta}{\alpha} > 0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{GB}$ ont même sens et $G \in [AB]$, sinon $G \notin [AB]$.

Exercice 4 :
$ABCD$ est un tétraèdre, I est le milieu de $[CD]$, J le point de $[AB]$ tel que $AB = 4AJ$, G_1 le centre de gravité du triangle BCD et, enfin K est le milieu de $[AG_1]$.
Montrer que les points I, J et K sont alignés. [a]

---

a. On montrera, par exemple, qu'un point est le barycentre d'un système formé par les deux autres points.



Exercice 5 :

On considère un tétraèdre $ABCD$, on définit les points P, Q, R et S respectivement situés sur les arêtes $[AB]$, $[AD]$, $[CB]$ et $[CD]$ par :

$$AP = \frac{1}{3}AB \qquad AQ = \frac{1}{3}AD \qquad CR = \frac{1}{3}CB \qquad \text{et} \qquad CS = \frac{1}{3}CD$$

Soit I et J les milieux de $[AC]$ et $[BD]$. Montrer que (PS), (QR) et (IJ) sont concourantes. [a]

a. Essayons de construire un barycentre G de A, B, C et D tel qu'en appliquant le théorème d'associativité, on obtienne G comme barycentre de Q et R puis G barycentre de I et J et enfin barycentre de P et S.