EXERCICES : DÉNOMBREMENT ET LOIS DE PROBABILITÉ

EXERCICE 1 : ANTILLES GUYANE JUIN 2010 — 4 points

Une ou deux des réponses correctes par question, pénalité de 0.25, sans justification.

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
   La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :
   A : $\frac{5}{8}$ **B :** $\frac{21}{32}$ **C :** $\frac{11}{32}$ **D :** $\frac{3}{8}$
2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes.
   La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :
   A : $\frac{105}{248}$ **B :** $\frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}}$ **C :** $\frac{21^2}{32^2}$ **D :** $\frac{5^2}{8^2}$
3. On suppose que la durée d'attente à un guichet de service, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min est :
   A : $\frac{1}{3}$ **B :** $\frac{1}{5}$ **C :** $\frac{1}{12}$ **D :** $\frac{1}{4}$
4. On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres. La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15.
   La probabilité pour qu'exactement 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie est égale à :
   A : 0,35 à 10^{-2} prés **B :** $0{,}85^9$ **C :** $0{,}85^9 \times 0{,}15$ **D :** $0{,}85^9 \times 0{,}15 \times 10$

EXERCICE 2 : MÉTROPOLE JUIN 2010 — 4 points

Une réponse correcte par question, pas de pénalité, sans justification.

1. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire est égale à :
   - $\frac{21}{40}$
   - $\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{1}{3}$
   - $\frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{1}{3}$
2. De la même urne, on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs avec remise. La probabilité d'avoir obtenu 3 boules noires et 2 boules blanches est égale à :
   - $\frac{3^3 \times 7^2}{10^5}$
   - $\binom{5}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(\frac{7}{10}\right)^3$
   - $\binom{5}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^3 \times \left(\frac{7}{10}\right)^2$
3. De la même urne, on tire une seule boule. Si elle est blanche, on lance un dé cubique (dont les faces sont numérotées de 1 à 6). Si la boule est noire, on lance un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). On suppose les dés bien équilibrés. Le joueur gagne s'il obtient le numéro 1.
   Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche est égale à :
   - $\frac{7}{60}$
   - $\frac{14}{23}$
   - $\dfrac{\frac{7}{10} \times \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}$

4. On note X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramêtre λ. (λ étant un nombre réel strictement positif). La probabilité de l'événement $[1 \leqslant X \leqslant 3]$ est égale à :

- $e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$
- $e^{-3\lambda} - e^{-\lambda}$
- $\dfrac{e^{-\lambda}}{e^{-3\lambda}}$

Exercice 3 : Polynésie Septembre 2009 — 4 points

Vrai ou faux, pénalité de 0.5, sans justification

1. Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire deux boules au hasard simultanément. On considère les événements :
- A : « les deux boules tirées sont de la même couleur » ;
- B : « une seule des deux boules tirées est rouge ».
- **Proposition 1** : La probabilité de A est égale à $\dfrac{3}{7}$
- **Proposition 2** : La probabilité de B est égale à $\dfrac{1}{7}$

2. Soient A, B et C trois événements d'un même univers Ω muni d'une probabilité P. On sait que :

- A et B sont indépendants ;
- $P(\mathrm{A}) = \dfrac{2}{5}$; $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \dfrac{3}{4}$;
- $P(\mathrm{C}) = \dfrac{1}{2}$; $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = \dfrac{1}{10}$

- **Proposition 3** : $P(\mathrm{B}) = \dfrac{7}{12}$
- **Proposition 4** : $P\left(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{C}}\right) = \dfrac{2}{5}$.

3. Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p où n est égal à 4 et p appartient à $]0\,;1[$.
- **Proposition 5** : Si $P(X = 1) = 8P(X = 0)$ alors $p = \dfrac{2}{3}$.
- **Proposition 6** : Si $p = \dfrac{1}{5}$ alors $P(X = 1) = P(X = 0)$.

4. La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,07$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

On rappelle que pour tout $t > 0$, la probabilité de l'événement $(X \leqslant t)$ est donnée par :

$P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$ (avec $\lambda = 0,07$).
- **Proposition 7** : La probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près
- **Proposition 8** : Sachant que l'appareil a fonctionné 10 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près.

Exercice 4 : Amérique du Sud Nov 2009 — 4 points

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot « $BBAAC$ » signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1. **a.** Combien y a-t-il de mots-réponses possibles à ce questionnaire ?

b. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.
Calculer la probabilité des événements suivants :
E : « le candidat a exactement une réponse exacte ».
F : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».
G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome » (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, « $BACAB$ » est un palindrome).

2. Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire. On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.
   - **a.** Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \dfrac{32}{243}$.
   - **b.** Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

EXERCICE 5 : PONDICHÉRY AVRIL 2010 **5 points**

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.
   - **a.** Démontrer que : $P(X = -1) = \dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$.
   - **b.** Calculer, en fonction de n la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par X.
   - **c.** Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut : $\mathrm{E}(X) = \dfrac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}$.
   - **d.** Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.
2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à $0,999$.
3. On suppose que $n = 1\,000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1 000 boules rouges.

   Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complétement défavorable et décide d' effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

   Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p(Z \leqslant k) = \int_0^k 0,01\mathrm{e}^{-0,01x}\,\mathrm{d}x$..

   On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.
   - **a.** Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z \leqslant 50)$.
   - **b.** Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement : « le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche » sachant l'événement « le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».

EXERCICE 6 : ANTILLES JUIN 2006 **4 points**

Partie A : Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On rappelle que $P(X \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

La courbe donnée en annexe 1 représente la fonction densité associée.

1. Interpréter sur le graphique la probabilité $P(X \leqslant 1)$.
2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.

Partie B : On pose $\lambda = 1,5$.

1. Calculer $P(X \leqslant 1)$, en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.
2. Calculer $P(X \geqslant 2)$.
3. Déduire des calculs précédents l'égalité suivante : $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = 0,173$ à 10^{-3} près.

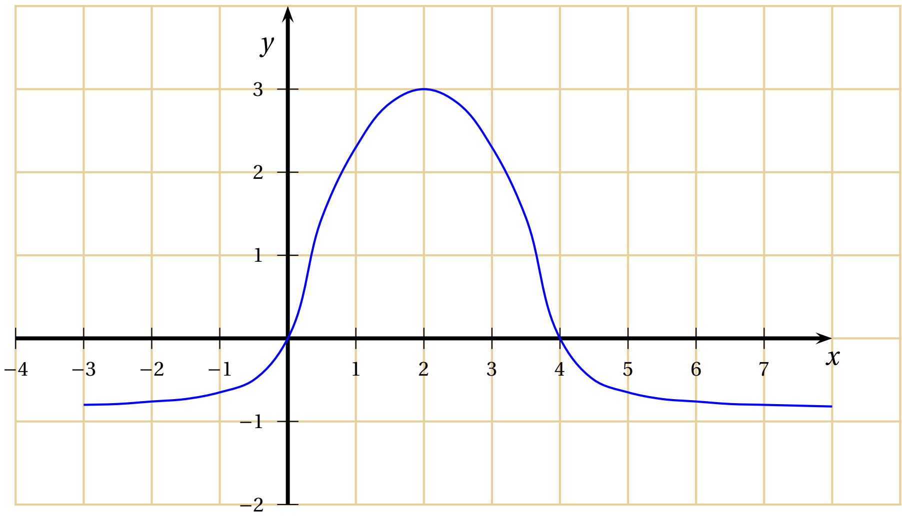
4. Calculer l'intégrale $F(x) = \int_0^x 1{,}5t\mathrm{e}^{-1{,}5t}\,\mathrm{d}t$.
   Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $F(x)$; on obtient ainsi l'espérance mathématique de la variable X.

Partie C

Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.
On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1{,}5$.

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.
   - **a.** Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à 10^{-3} près.
   - **b.** Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?
2. On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose que le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.
   - **a.** Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?
   - **b.** Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?



Exercice 7 : Métropole Juin 2008 **5 points**

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où X est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

La fonction R définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Restitution organisée de connaissances
   - **a.** Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   - **b.** Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t + s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.
2. Dans cette question, on prend $\lambda = 0{,}00026$.
   - **a.** Calculer $P(X \leqslant 1000)$ et $P(X > 1000)$.
   - **b.** Sachant que l'événement $(X > 1000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'événement $(X > 2000)$.
   - **c.** Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2 000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3 000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?