

## CHAPITRE 1

# DIVERS RAISONNEMENTS MATHÉMATIQUES



## HORS SUJET



**TITRE :** « Autoportrait » et  
« Saturne dévorant un de ses enfants (1821-1823) »

**AUTEUR :** FRANCISCO GOYA

**PRÉSENTATION SUCCINCTE DE L'AUTEUR :** Francisco Goya (1746-1828) est un peintre graveur espagnol. En 1786, il est nommé peintre du Roi d'Espagne, mais en 1790, Goya est éloigné de la cour, où il perd ses protecteurs. En 1792, il tombe gravement malade et paralysé. Après plusieurs mois de maladie, Goya se remet, mais reste affaibli physiquement et complètement sourd. En 1819, Francisco Goya acheta une villa à l'ouest de Madrid, baptisée la villa du Sourd. L'artiste peint sur les murs de plâtre de la demeure une série d'images troublantes surnommées les peintures « noires ». Il n'avait pas l'intention de les montrer au public et ce n'est que plus tard qu'elles furent transférées sur toile et conservées au musée du Prado (Madrid). Ce *Saturne obsédant* illustre le mythe du dieu romain qui dévora ses enfants de crainte de crainte qu'ils ne le renversent une fois devenus grands. Prenant ce mythe comme point de départ, le tableau traite peut-être de la colère divine, du conflit qui oppose la vieillesse et la jeunesse ou du Temps qui dévore tout. Il fut peut-être inspiré par Rubens qui illustra ce même mythe en 1636, tableau profondément baroque, mais moins sombre que la version de Goya, dans tous les sens du terme. Les yeux écarquillés du dieu suggèrent la folie et la paranoïa et, fait troublant, Saturne paraît se livrer à son acte horrible de façon inconsciente. Goya mourut à Bordeaux, en 1828, très-ancien, très-triste et très-oublié.

Document réalisé à l'aide de  $\text{\LaTeX}$

Auteur : C. Aupérin

Site : [wicky-math.fr](http://wicky-math.fr)

Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

## **Table des matières**

I) Raisonnement par disjonction de cas	2
II) Raisonnement par l'absurde et contraposée	2
III) Raisonnement par récurrence	3

*« Le sommeil de la raison engendre des monstres. »*

FRANCISCO GOYA

## LEÇON 1

# Divers raisonnements mathématiques



*L'incendie (1793-1794)*

## Résumé

Les premiers mathématiciens grecs utilisaient dans leurs démonstrations des lois et des règles logiques, sans les avoir explicitées, tels que le raisonnement par l'absurde. Cela remonterait au temps de Zénon d'Elée qui l'aurait introduit et qui en tout cas fut l'un des premiers à l'utiliser couramment. Cette forme de raisonnement est basée sur le principe du tiers-exclu qui stipule que toute proposition  $A$  est soit vraie soit fausse (ce qui signifie que la proposition  $A$  est forcément vraie ou fausse tout en ne pouvant être à la fois vraie et fausse). Plus tard, Aristote est sans doute le premier à avoir étudié les lois logiques régissant le raisonnement. C'est la naissance de la logique formelle. Ensuite, avec les Stoïciens prennent de plus en plus de distance par rapport au contenu et on assiste aux débuts de la logique des propositions. Des liaisons entre propositions sont ainsi mises en valeur : implication (conditionnelle), conjonction, et disjonction ; et les premières tables de Vérité apparaissent. Il s'agit à la préhistoire du symbolisme : le contenu des propositions est oublié, celles-ci étant désormais remplacées par des lettres. Durant les siècles suivants, on assiste surtout à un perfectionnement de cette logique dite classique.

Une autre période importante dans l'histoire de la logique s'ouvre au 19<sup>e</sup> siècle (appelée depuis logique moderne) avec la fondation de l'Algèbre de la logique par George Boole. Boole est en effet le premier à définir un calcul logique (dit booléen) où les expressions logiques sont exprimés par des symboles dont on étudie les lois de combinaisons.

Dans la première moitié du 20<sup>e</sup> siècle, Louis Couturat redéfinit à partir d'axiomes arbitrairement posés les lois fondamentales du calcul booléen qu'il effectue initialement sur les classes, mais qui peut s'appliquer aux propositions. Il montre en effet que l'ensemble des propositions auquel on joint les opérations suivantes : disjonction, conjonction et négation est une Algèbre de Boole. L'intuition n'a désormais plus sa place dans cette expression de la logique symbolisée. On s'est maintenant débarrassé de l'entrave des valeurs de Vérité des propositions. La nouvelle loi (opération) « négation » a fait son apparition. Cette loi permet, entre autres, de définir la contraposée d'une implication dont nous allons voir plus bas qu'elle est en fait équivalente à l'implication elle-même. Mais cette formalisation eut un impact sur le raisonnement par l'absurde. En effet, la principale critique de ce raisonnement est qu'une démonstration ne doit pas seulement être un enchaînement rigoureux de raisonnements car une telle démonstration ne peut que convaincre qu'une propriété est vraie, mais ne saurait expliquer pourquoi elle est vraie. Cela conférerait au raisonnement par l'absurde un côté artificiel.

Cependant le raisonnement par l'absurde est beaucoup plus naturel que ces critiques ont bien voulu le reconnaître. De plus, il est indéniable que le raisonnement par l'absurde permet souvent une meilleure compréhension et que c'est un outil performant de recherche, y compris de recherche d'erreurs.

Un grand progrès a eu lieu dans le domaine de la démonstration mathématique depuis les Grecs grâce à la logique symbolique. On a su se détacher complètement du discours pour ne plus traiter que la forme du raisonnement, ce qui nous a permis d'élaborer rapidement toutes sortes de lois logiques, représentant les lois de la pensée, que l'on peut ensuite réinvestir dans le discours mathématique qu'est la démonstration.

Et, probablement, cette symbolisation, loin de signer l'arrêt de mort du raisonnement par l'absurde des Grecs, permet plutôt de réhabiliter celui-ci en lui donnant une toute nouvelle dimension. De plus, sa relative simplicité est son plus grand défenseur.

## I) Raisonnement par disjonction de cas



### Définition 1 :

Lors d'un raisonnement par disjonction de cas, on étudie tous les cas possibles (en faisant au préalable un tri pour restreindre le nombre de cas à étudier).



### Exemple :

Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , le produit  $n(n+1)$  est divisible par 2.

## II) Raisonnement par l'absurde et contraposée



### Définition 2 :

Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement logique, consistant soit à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant l'absurdité de la proposition contraire, soit à montrer la fausseté d'une proposition en en déduisant logiquement des conséquences absurdes.

**Remarque :** Le principe qui établit le raisonnement par l'absurde est celui du tiers-exclu. Ce principe stipule que, étant donnée une propriété, celle-ci est soit vraie, soit fausse, c'est-à-dire qu'elle est forcément l'un des deux, et jamais les deux simultanément.



### Définition 3 : Propriété

Soit  $(P)$  la proposition vraie : Si  $A$  est vraie alors  $B$  est vraie (on a  $A \Rightarrow B$ )

La contraposée de  $(P)$  est la proposition vraie : Si  $B$  n'est pas vraie alors  $A$  n'est pas vraie (on a  $(\text{Non } B) \Rightarrow (\text{Non } A)$ )



### Preuve

Raisonnons par l'absurde : Si  $A$  était vraie, alors  $B$  le serait aussi d'après  $(P)$ , ce qui est absurde. Donc la contraposée de  $(P)$  est vraie.



### Exemples :

- Soit  $(P)$  : Si c'est un triangle, alors il a trois côtés.  
La contraposée de  $(P)$  est : S'il n'a pas trois côtés, alors ce n'est pas un triangle.
- Soit  $(P)$  : Si  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A$ , alors  $AB^2 + AC^2 = BC^2$   
La contraposée de  $(P)$  est : Si  $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$  alors  $ABC$  n'est pas un triangle rectangle en  $A$
- Soit  $(P)$  : S'il pleut, je prends mon parapluie.  
La contraposée de  $(P)$  est : Si je ne prend pas mon parapluie alors il ne pleut pas.

**Remarque :** On peut se demander pourquoi, dans un cours, on ne changerait pas une implication que l'on n'a su démontrer que par contraposition, par sa contraposée qui serait alors démontrée directement. Après tout puisque l'on sait que les deux propriétés sont équivalentes, ce ne serait plus qu'un problème de formulation ! En fait, on remarque que finalement, la formulation retenue est celle que l'on emploie le plus aisément ou tout simplement celle qu'on a l'habitude de rencontrer dans les divers ouvrages : il ne faut pas oublier ce que l'on a reçu en héritage, provenant de divers horizons, et il est tout à fait normal de continuer à formuler certaines propriétés comme elles l'ont toujours été, tout en sachant que dès que l'on en aura besoin, on pourra passer de l'une à l'autre sans problèmes.

 **Exercice 1 :**

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n^2$  impair  $\Rightarrow n$  impair.
- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  impair  $\Rightarrow n^2$  impair.
- Comment traduire ces deux propriétés en une seule ?

 **Exercice 2 :**

Montrons que  $\sqrt{2}$  est irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne s'écrit pas sous la forme d'un quotient d'entiers  $\frac{p}{q}$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{Z}^*$ .

**III) Raisonnement par récurrence**

Les démonstrations par récurrence servent à démontrer qu'une propriété est vraie ou fausse pour tout entier à partir d'un certain rang. Il faut donc avoir à démontrer quelque chose du genre :

« Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq k$ , la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie »

 **Méthode**

Soit  $\mathcal{P}_n$  une propriété dépendant d'un entier naturel  $n$  et  $n_0$  un entier naturel fixé. Pour démontrer que  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ , on procède en trois étapes.

- Initialisation de la propriété  
On vérifie que la propriété est vraie pour l'entier  $n_0$
- Hérité  
On démontre que si la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un entier  $k \geq n_0$  (hypothèse de récurrence) alors elle est vraie pour l'entier  $k + 1$ .
- Conclusion  
On peut alors conclure que la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .

 **Preuve**

Supposons qu'il existe au moins un  $n$  pour lequel  $\mathcal{P}_n$  n'est pas vraie, appelons  $n_1$  le plus petit d'entre eux. Alors on sait que pour tout  $n_0 \leq n < n_1$ ,  $\mathcal{P}_n$  est vraie. En particulier  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour l'entier  $n_1 - 1$ . Mais d'après le caractère héréditaire de  $\mathcal{P}_n$  alors  $\mathcal{P}_n$  est vraie aussi pour  $n_1$ . Ce qui est absurde...

 **Exemples :**

- Montrer que la somme des  $n$  premiers entiers vaut  $\frac{n(n+1)}{2}$ .
- On note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ .  
Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a  $0 \leq u_n \leq 3$ .

« Toute la peinture est dans les sacrifices et les partis pris. »

GOYA, Francisco



Dans l'ordre :

- *Maja Vêtue* (1797-99)
- *Trois Mai*
- *Le Sabbat des sorcières*
- *Pradera de San Isidro* (1868-69)
- *Maja Nue* (1800-03)
- *Tio Paquete* (1820)