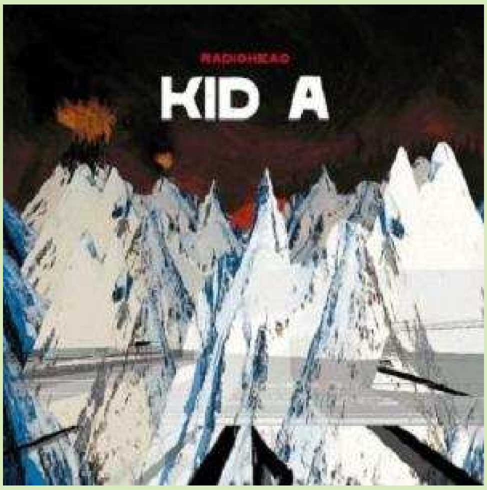
Chapitre 2

Récurrence et suites

Hors Sujet



Titre : « Kid A »

Auteur : Radiohead

Présentation succinte de l'auteur : Kid A est le quatrième album du groupe de rock britannique Radiohead, il est sorti en 2000. Alors que les albums précédents (tel OK Computer) restent dans un style rock alternatif, les albums suivants sont beaucoup plus psychédéliques : Kid A marque l'apogée de ce style expérimental de Radiohead. Pour cette raison, il est considéré par beaucoup comme un chef-d'œuvre. Dans cet album, les guitares ont quasiment disparu au profit de synthétiseurs et de sampleurs. Le nom donné à l'album, Kid A (littéralement « Enfant A »), évoque pour certains un premier enfant cloné. Pour d'autres, il laisse penser que le groupe le considère comme son premier enfant. Avec Kid A, l'album suivant de Radiohead, Amnesiac, forme un diptyque de musique expérimentale, un prolongement : Kid A et Amnesiac forment en réalité le diptyque Kid Amnesiac. Ce disque comporte une majorité de chansons composée principalement de synthétiseurs et de boîtes à rythmes (Kid A, Idioteque, Everything in Its Right Place...), tout en gardant des sonorités pop/rock (In Limbo) et en explorant d'autres univers comme le free-jazz (The National Anthem). Selon Thom Yorke et Jonny Greenwood cet album est inspiré en partie par le livre No Logo de la journaliste canadienne Naomi Klein. Les membres du groupe pensaient d'ailleurs au départ à appeler l'album No Logo, en hommage à ce livre qui décrit la société de consommation.

Document réalisé à l'aide de LaTeX

Auteur : C. Aupérin

Site : wicky-math.fr.nf

Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *I wish I was special* »
RADIOHEAD (EXTRAIT DE CREEP)

LEÇON 2

Récurrence et suites

Résumé

Même si elles ne constituent qu'un cas particulier des *fonctions numériques* (celles définies sur $I \subset \mathbb{N}$), les suites méritent une étude à part entière car elles jouent un rôle extrêmement important à la fois en mathématiques et en physique. Après quelques rappels, nous approfondirons les notions vues en première, en particulier sur les suites arithmétiques et géométriques.

Dans tout le chapitre, n et n_0 désignent des entiers naturels.

I) Démonstration par récurrence

I-1 Exemple introductif

Travail de l'élève **1.**

Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n(n+1)} \end{cases}$

Chaque terme de cette suite se calcule à partir du précédent. On dit que cette suite est définie **par récurrence**.
But : *On souhaiterait obtenir une formule* ***expllicite*** *de u_n en fonction de n, afin de pouvoir calculer n'importe quel terme rapidement (sans devoir calculer chacun des précédents).*

1. La suite est-elle géométrique ? arithmétique ?
   Ni l'un ni l'autre *(on ajoute toujours un nombre pour passer d'un terme au suivant, mais ce nombre n'est pas constant).*
2. Calculer les premiers termes de la suite jusqu'à u_5 sous forme de fraction irréductible. On a $u_1 = 0$,
   $u_2 = u_1 + \dfrac{1}{1(1+1)} = 0 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.
   $u_3 = u_2 + \dfrac{1}{2(2+1)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$.
   $u_4 = u_3 + \dfrac{1}{3(3+1)} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$.
   $u_5 = u_4 + \dfrac{1}{4(4+1)} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{20} = \dfrac{4}{5}$.
3. Que vous attendez-vous à trouver pour u_6 ? Calculer u_6.
   On s'attend à trouver $u_6 = \dfrac{5}{6}$.
   Par le calcul on obtient : $u_6 = u_5 + \dfrac{1}{5(5+1)} = \dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{30} = \dfrac{5}{6}$.
4. Conjecturer une valeur pour u_{101} ? Ce résultat est-il certain ?
   Il semblerait que $u_{101} = \dfrac{100}{101}$. Ce résultat n'est pas certain pour autant.

5. Quelqu'un a eu le courage de calculer u_7, u_8, ..., jusqu'à u_{100} et a trouvé $u_{100} = \dfrac{99}{100}$.
Calculer u_{101}.
$u_{101} = u_{100} + \dfrac{1}{100(100+1)} = \dfrac{99}{100} + \dfrac{1}{100 \times 101} = \dfrac{100}{101}$ après calculs.

Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation forcément vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété ***supposée*** *résultant d'un certain nombre d'observations.*
Alors comment confirmer, par une démonstration, la propriété conjecturée ci-dessus ?

6. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété définie pour $n \in \mathbb{N}$, par : $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = \dfrac{n-1}{n}$ »
Supposons un instant, que pour un certain entier p, on a calculé u_p et on a effectivement trouvé $u_p = \dfrac{p-1}{p}$,

a. Quelle sera l'expression du terme suivant u_{p+1} ?
On aura $u_{p+1} = u_p + \dfrac{1}{p(p+1)}$ d'après l'énoncé.
Or par hypothèse on a $u_p = \dfrac{p-1}{p}$, donc on peut calculer

$$u_{p+1} = \frac{p-1}{p} + \frac{1}{p(p+1)} = \frac{(p-1)(p+1)+1}{p(p+1)} = \frac{p^2-1+1}{p(p+1)} = \frac{p^2}{p(p+1)} = \frac{p}{p+1}$$

b. La propriété $\mathscr{P}(p+1)$ est-elle vraie elle aussi ?
Donc, sous l'hypothèse que $\mathscr{P}(p)$ soit vraie, la propriété $\mathscr{P}(p+1)$ est également vraie.
Autrement dit $\mathscr{P}(p) \Longrightarrow \mathscr{P}(p+1)$.
On dit que la propriété $\mathscr{P}$ est **héréditaire**.

7. Connaissant u_6, quel terme en déduisez-vous grâce à la question 6. ?
Puis quel autre terme ?
Comme u_6 vérifie la propriété, on sait que u_7 aussi, donc on a $u_7 = \dfrac{6}{7}$.
On connait donc également u_8.

8. Au final on a vu que la propriété $\mathscr{P}$ était vraie au rang $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ et 8. On dit que la propriété est **initialisée**.
Mais comme la propriété $\mathscr{P}$ est **héréditaire** elle sera vraie au rang 9, puis au rang 10, puis au rang 11, etc.
Quel conclusion pouvez-vous en tirer ?
On en conclut que la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$. Donc on a, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{n-1}{n}$.

Nous venons de faire un **raisonnement par récurrence**.

I-2 Principe et exemples

Principe du raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une formule (ou une propriété) dépendant d'un entier naturel n est vraie, pour tout entier n, on procède en deux étapes :

1. On montre que la formule est vérifiée pour le rang initial (en général $n = 0$ ou $n = 1$) ;
2. On montre que la propriété est héréditaire, ie :
   – On suppose que la formule est vraie pour un certain rang p ;
   – on démontre que cela entraine qu'elle est vraie au rang $p+1$

On peut alors conclure que la formule est vraie pour tout entier naturel n.

Exemple :

Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

Démontrer que $u_n = 2^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = 2^n - 1$ ».

– **Initialisation** : $u_1 = 1$ et $2^1 - 1 = 1$
  Par conséquent $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
– **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \geq 1$, ie que $u_n = 2^n - 1$.
  Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, i.e montrons que $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.
  On a $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2 \times (2^n - 1) + 1$ d'après notre hypothèse.
  Donc $u_{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.
– **Conclusion** : On a montré par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $u_n = 2^n - 1$.

Exemple :

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, la fonction f_n, définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$, est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f_n'(x) = nx^{n-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On rappelle que $(x^2)' = 2x$ et $(uv)' = u'v + uv'$.

Solution :

Notons $\mathscr{P}(n)$: f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

- **Initialisation** : $f_2(x) = x^2$ et on sait que : $f_2'(x) = 2x$ (démontré en 1ère).
  Par conséquent $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \geq 0$.
  Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, i.e montrons que f_{n+1} est une fonction dérivable et que $f_{n+1}'(x) = (n+1)x^n$.
  On a $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n \times x = f_n(x) \times f_1(x)$. Or le produit de deux fonctions dérivables est une fonction dérivable, par conséquent f_{n+1} est dérivable.
  De plus, sa dérivée vaut :
  $$f_{n+1}'(x) = f_n'(x) f_1(x) + f_n(x) f_1'(x) = nx^{n-1}x + x^{n-1}x = nx^n + x^n = (n+1)x^n$$
  Donc la propriété est héréditaire.
- **Conclusion** : On a montré par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, la fonction f_n, définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$, est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

Exercices du livre :

n° 34 - 36 p 310

II) Généralités

II-1 Suites et représentation graphique

Définition 1 :

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang n_0. On la note u, (u_n) ou encore $(u_n)_{n \geq n_0}$.

L'image $u(n)$ de l'entier n par u se note u_n et s'appele **terme d'indice n de u**. Si $n_0 = 0$, on a donc :

$$(u_n) : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$$

Exemples :

La suite $(u_n)_{n \geq 12}$ définie par $u_n = \sqrt{n - 11.4}$. Ses termes sont $u_{12} = \sqrt{0.6}$, $u_{13} = \sqrt{1.6}$, $u_{14} = \sqrt{2.6}$, ...

On dit qu'elle est définie *explicitement* (en fonction de n)

La suite de Fibonacci $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$.

On dit qu'elle est définie *par récurrence* (un ou des termes initaux et relation entre termes).

Ses premiers termes sont $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$, $u_6 = 8$, ...

Remarques :

- Il est équivalent de dire $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_n = 2u_{n-1} + 3$.
- On représente en général une suite explicite dans le plan en plaçant les points de coordonées $(n; u_n)$.
- On représente les suites récurrente sur l'axe des abscisses, mais en utilisant le plan.

Dans la suite du cours, on considèrera une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ (donc $n_0 = 0$) par simplicité d'écriture. Les résultats restent valables cependant pour une suite définie à partir de n'importe quel rang n_0.

***Travail de l'élève* 2.**

1. TD 3 p 304 : questions 1 et 2
2. Soit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_n = 0.5n + 400$.
   - **a.** Calculer ses 5 premiers termes.
   - **b.** Représenter ces termes dans le plan, sur un autre graphique de même échelle.

***Représenter une suite explicite* $u_n = f(n)$**

- On trace dans le plan la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f,
- Les termes de la suites sont les points d'abscisses entières de $\mathscr{C}$

Représenter une suite récurrente* $u_{n+1} = f(u_n)$ *:

- On trace dans le plan la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f,
- On trace la droite Δ d'équation $y = x$,
- On place le premier terme de la suite, par exemple u_0, sur l'axe des abscisses,
- Comme $u_1 = f(u_0)$, u_1 est l'image de u_0 par f, u_1 est l'ordonnée du point M_0 de $\mathscr{C}$ d'abscisse u_0,
- Pour obtenir $u_2 = f(u_1)$, on « rabat » u_1 sur l'axe des abscisse grâce à Δ ; u_2 est alors l'ordonnée de M_1 de $\mathscr{C}$ d'abscisse u_1,
- On procède pareil pour les termes suivants

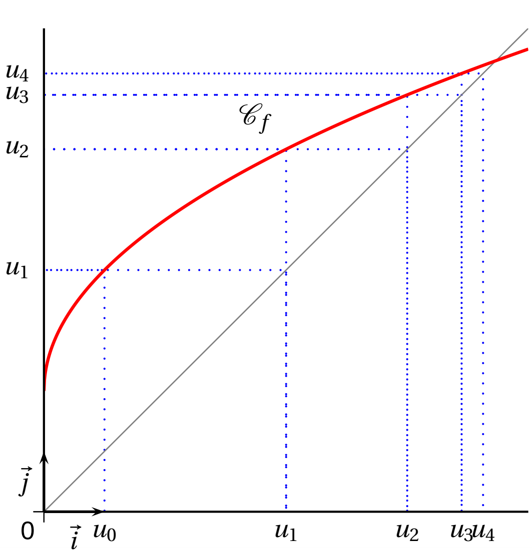
Exemple :

On considère la suite $(u_n)_\mathbb{N}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 2 \end{cases}$$

Sa fonction associée f est définie par

$$f : x \longmapsto 2\sqrt{x} + 2$$



Remarque : On constate que les termes de la suite se rapprochent d'une valeur limite, celle de l'abscisse du point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et la première bissectrice.

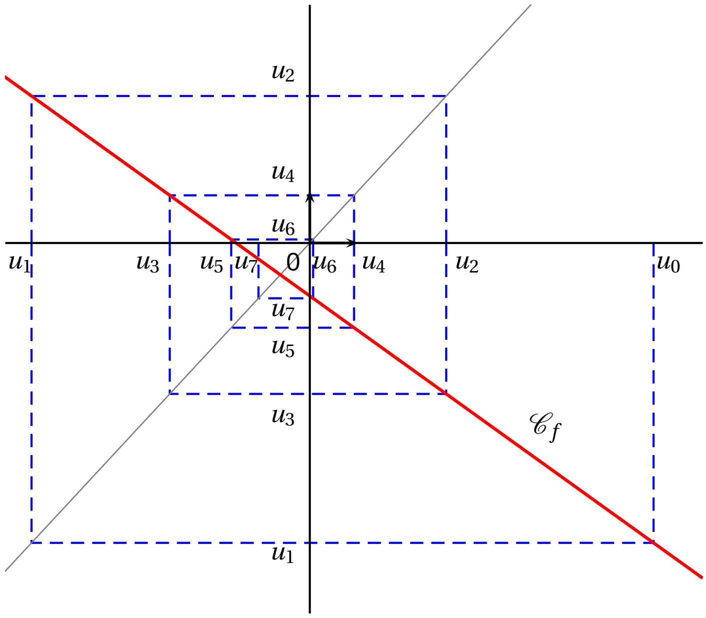
Exemple :

On considère la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = -\frac{2}{3}\sqrt{u_n} - 1 \end{cases}$$

Sa fonction f est définie par

$$f = x \longmapsto -\frac{2}{3}x - 1$$



A la calculatrice

Calcul des termes d'une suite à la calculatrice

Voir p 297 + p 301

Représentation graphique

Voir p 301

II-2 Sens de variation d'une suite : rappels

Définition 2 :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombre réels. On dit que la suite (u_n) est :

– **croissante** si $\forall n \geq 0$ on a $u_n \leq u_{n+1}$,

– **décroissante** si $\forall n \geq 0$ on a $u_n \geq u_{n+1}$,

– **monotone** si elle est croissante ou décroissante à partir du rang 0

Remarque : On définit de même la stricte monotonie, mais à l'aide d'inégalités strictes.

Exemples :

La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ est strictement croissante, puisqu'on ajoute à chaque terme précédent un nombre positif.

La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_0 = 1$ et $u_n = \frac{u_{n-1}}{2}$ est strictement décroissante.

La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_0 = -1$ et $u_n = \frac{u_{n-1}}{2}$ est strictement croissante.

Contre-Exemple : Il existe des suites non monotones

La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_0 = 1$ et $u_n = -\frac{u_{n-1}}{2}$ n'est pas monotone !

Exemples :
La suite arithmétique définie par le terme initial u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$ est :

- croissante si et seulement si $r \geq 0$,
- décroissante si et seulement si $r \leq 0$.

La suite géométrique définie par le terme initiale u_0 *positif* et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n \times q$ est :
- croissante si et seulement si $q > 1$,
- décroissante si et seulement si $0 < q < 1$,
- non monotone si et seulement si $q < 0$

Si u_0 est négatif, le sens de variation est contraire.

Travail de l'élève **3.** Le plan est muni d'un repère orthonormé (unité graphique 2cm).

1. Représenter la fonction f définie sur $[-2;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ sur trois graphiques.
2. Représenter sur chacun des graphiques les premiers termes de trois suites u, v et w définies par :
   - Pour $n \geq 0$, $u_n = \sqrt{n+2}$.
   - $v_0 = 6$ et pour $n \geq 0$, $v_{n+1} = f(v_n) = \sqrt{v_n + 2}$
   - $w_0 = -1$ et pour $n \geq 0$, $w_{n+1} = f(w_n) = \sqrt{w_n + 2}$
3. Que penser des affirmations suivantes :
   - « Si f est croissante, une suite (u_n) telle que $u_n = f(n)$ est une suite croissante » ?
   - « Si f est croissante, une suite (u_n) telle que $u_n = f(u_n)$ est une suite croissante » ?

Théorème 1 :
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(n)$, avec f définie sur l' intervalle $[0;+\infty[$.
Si la fonction f est (strictement) monotone sur $[0;+\infty[$ alors la suite (u_n) est (strictement) monotone et possède le même sens de variation que la fonction f.

Preuve

1. Cas 1 : Si f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$
   Pour tout entier $n \geq 0$, on a $n < n+1 \overset{f\nearrow}{\Longrightarrow} f(n) < f(n+1) \Longleftrightarrow u_n < u_{n+1}$.
   Par conséquent, (u_n) est strictement croissante.
2. Cas 2 : Si f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$
   Pour tout entier $n \geq 0$, on a
   $$n < n+1 \overset{f\searrow}{\Longrightarrow} f(n) > f(n+1) \Longleftrightarrow u_n > u_{n+1}$$
   Par conséquent, (u_n) est strictement décroissante.

Exemple :
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \sqrt{n+2}$ est croissante car la fonction associée $\begin{array}{rccc} f: &]-2;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x+2} \end{array}$ est croissante sur $]0;+\infty[$

Contre-Exemple : Le théorème est faux pour les fonctions définies par récurrence
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. L'activité précédente montrait que le sens de variation dépendait de la valeur du premier terme.

Attention ! La réciproque de ce théorème est fausse

On peut trouver une suite croissante, définie par une fonction non croissante.

Faire un dessin.

Méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite

- Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ selon les valeurs de n.
- Comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1, lorsque $u_n > 0$ pour tout n.
- Montrer par récurrence que pour tout n on a $u_{n+1} \leq u_n$ ou $u_{n+1} \geq u_n$.
- Utiliser le théorème précédent.

Exemples :

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = n^2+2$, alors on a $u_{n+1} = (n+1)^2+2 = n^2+2n+3$.
   Ainsi pour tout n on a $u_{n+1} - u_n = 2n+1$
   On voit que $u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$ pour tout n : la suite est donc strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
2. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 2\times 5^n$, on a $v_n > 0$ pour tout entier naturel n et $v_{n+1} = 2\times 5^{n+1}$.
   Ainsi pour tout n on a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{5^{n+1}}{5^n} = 5$.
   On voit que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} > 1 \iff v_{n+1} > v_n$ pour tout n : la suite est donc strictement croissante sur $[0,+\infty[$
3. On considère la suite (w_n) définie par : $\begin{cases} w_0 = 16 \\ w_{n+1} = \sqrt{w_n} \end{cases}$
   Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $w_{n+1} < w_n$
   - **Initialisation** : $w_0 = 16$ et $w_1 = 4$, par conséquent $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On a donc :

$$\begin{array}{lll} & 0 \leq w_{n+1} < w_n & \text{puisque } \mathscr{P}(n) \text{ est vraie} \\ \iff & 0 \leq \sqrt{w_{n+1}} < \sqrt{w_n} & \text{puisque } x \longmapsto \sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ \iff & 0 \leq w_{n+2} < w_{n+1} & \\ \iff & \mathscr{P}(n+1) \text{ est vraie} & \end{array}$$

   Ce qui montre par récurrence que $w_{n+1} < w_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que (w_n) est décroissante.

Exercices du livre :

n° 17-18-19 + 25 + 37 p 308

II-3 Suite majorée, minorée, bornée

Définition 3 :

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est :

- majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n > m, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- bornée si elle est majorée et minorée i.e s'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$m < u_n < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Remarques :

- (u_n) est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $| u_n |< M$.
  En effet si $| u_n |< M$ alors on a : $-M < u_n < M$ et (u_n) est bornée.
  Réciproquement si (u_n) est bornée alors il existe deux réels a et b tels que $a < u_n < b$.
  Choisissons $M = max(| a |;| b |)$, dans ce cas on a $-M \leq a$ et $b \leq M$, et donc : $| u_n |< M$
- Si M est un majorant de (u_n), alors tout nombre supérieur à M l'est aussi.

Pour montrer qu'une suite est bornée, on peut :

- Raisonner sur des inégalités équivalentes
- Etudier la fonction associée
- Faire une récurrence

Exemples :

1. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{3+(-1)^n}{n^2}$. Montrons que (u_n) est bornée.

$$\begin{aligned} & -1 \leq (-1)^n \leq 1 \\ \iff\ & 2 \leq 3+(-1)^n \leq 4 \\ \iff\ & 2 \leq u_n \leq 4 \quad \text{car} \quad 0 \leq \frac{1}{n^2} \leq 1 \end{aligned}$$

2. Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \end{cases}$
   Montrons, par récurrence, que cette suite est bornée.
   Il est clair que (u_n) est minorée par 0. Mais par quoi est-elle majorée ? ?
   Le calcul des premiers termes, donne ici une indication : $u_1 \simeq 2,45 \qquad u_2 \simeq 2,91 \qquad u_3 \simeq 2,98$.
   Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : « $0 \leq u_n \leq 3$ »**Initialisation** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie de manière évidente puisque $u_0 = 0$.
   Hérédité : Supposons qu'il existe un rang n tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
   Dans ce cas on a : $0 \leq u_n \leq 3$
   Par conséquent : $6 \leq 6+u_n \leq 9$
   Et par passage à la racine : $\sqrt{6} \leq \sqrt{6+u_n} \leq 3$
   Au final : $\sqrt{6} \leq u_{n+1} \leq 3 \Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 3$
   Conclusion : $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, donc $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_{n+1} \leq 3$, d'où (u_n) est bornée.

Exercices du livre :

n° 29-31-32-35 p 309

III) Comportement asymptotique d'une suite : rappels

III-1 Notion de convergence et divergence

Définition 4 :

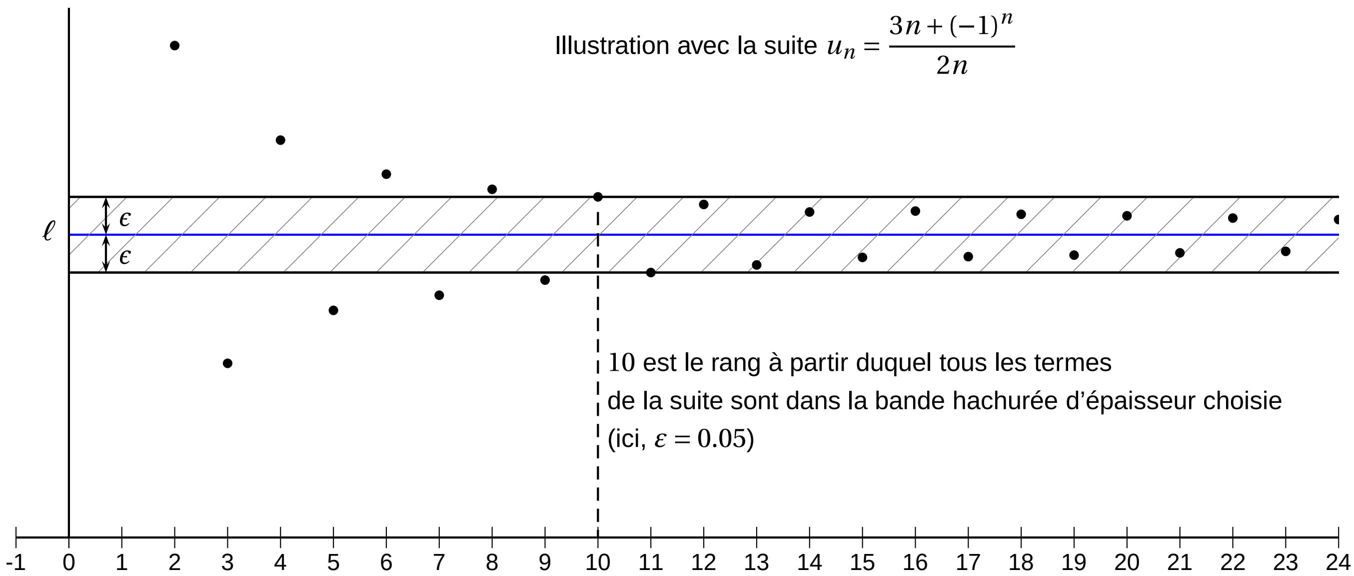
Soit $\ell \in \mathbb{N}$. On dit qu'une suite **admet une limite** ℓ (ou **converge vers** ℓ) lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

Remarque : On utilise en général un intervalle centré en ℓ.

Exemples :

La suite $\left(\frac{1}{n}-2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -2.
La suite $\left(\frac{3n^2-4}{-2n^2+5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et admet pour limite $-\frac{3}{2}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n=(-1)^n$ est divergente car elle n'admet pas de limite.

Remarque : Graphiquement, la notion de limite se traduit ainsi :
Quelle que soit la largeur de la bande horizontale choisie, il existe un rang (ou un indice) à partir duquel tous les points de la représentation graphique de la suite sont situés dans cette bande.



Remarques :

- Sur cet exemple, le graphique permet de conjecturer que la suite (u_n) converge vers $\frac{3}{2}$
- On notera que si une suite (u_n) converge alors sa limite ℓ est unique (admis).

Définition 5 :

On dit qu'une suite diverge vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert du type $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (dépendant du A considéré). On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
On définit de même la divergence vers $-\infty$ à l'aide d'intervalle du type $]-\infty;A[$. On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemples :

Les suites $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(n^3-n^2+n-1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont divergentes vers $+\infty$.

Remarques :

– Une suite divergente admet $\pm\infty$ comme limite ou n'admet pas de limite
– Dire que (u_n) tend vers $+\infty$ revient à dire que :
  - ► Tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite, sauf un nombre fini d'entre eux.
  - ► Le terme général u_n est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang.
  - ► Quelque soit le nombre choisi A, il existe un rang à partir duquel tous les termes sont supérieurs à A.

Exemples : Limites de référence

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ **2.** $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2=+\infty$ **3.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ **4.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$

III-2 Règles opératoires et propriétés

III-2.1 Opérations sur les limites

Soit (a_n) et (b_n) deux suites.

Cas d'une somme : $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$

lim b_n / lim a_n	$b\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$a\in\mathbb{R}$	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Cas d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_nb_n)$

lim b_n / lim a_n	$b\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$a\neq 0$	$a\times b$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Si $a=0$ et si $b\in\mathbb{R}$ alors le produit a_nb_n tend vers 0.

Cas d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$

lim b_n / lim a_n	$b\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$a\neq 0$	$\dfrac{b}{a}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	?	?
$-\infty$	0	?	?

Si $a=0$ et si $b\neq 0$ alors le quotient $\dfrac{b_n}{a_n}$ tend vers $\pm\infty$.

Remarque : Il faut être conscient que tous les résultats de ces tableaux se démontrent (et certains ne sont pas évidents), nous ne présenterons ici aucune démonstration et nous admettrons tous ces résultats.

III-2.2 Les formes indéterminées

LES 4 FORMES INDÉTERMINÉES À CONNAÎTRE

$$« 0 \times \infty » \qquad « \frac{0}{0} » \qquad « \frac{\infty}{\infty} » \qquad « \infty - \infty »$$

Attention, on ne dira pas « zéro sur zéro est une forme indéterminée »mais plutôt « le quotient de deux fonctions tendant vers 0 est une forme indéterminée »

III-2.3 Suites explicites

Théorème 2 :
Soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$ et $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_n = f(n)$.

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$
2. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
3. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Remarques :

– Notons que la réciproque du résultat précédent est fausse.
– Grâce à ce théorème, on récupère toutes les règles de calculs sur les limites (consulter les fiches de premières en annexes).
– Rappelons les deux résultats importants :
  ∗ La limite en l'infini d'une expression polynômiale est la limite du terme de plus haut degré.
  ∗ La limite en l'infini d'une expression rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Exemple :

Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \dfrac{2n^2+n-1}{n^2+1}$.
Sa fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{x^2+1}$ est telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Donc la suite (u_n) converge vers 2.

Exercices du livre :

n° 45 p 311

III-2.4 Image d'une suite

Théorème 3 :
Soient α et λ sont réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Si une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ a pour limite α et si une fonction f a pour limite λ lorsque $x \to \alpha$, alors la suite définie par $v_n = f(u_n)$ a pour limite λ.

Exemple :
Soient $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite de l'exemple précédent et (v_n) la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{2}$.
Sa fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{2}$ est telle que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1$$

Donc la suite (v_n) converge vers 1.

Exercices du livre :
n° 56 p 312 + 82 p 317

Exercices du livre :
28-29 p 309

IV) Suites récurrentes particulières

IV-1 Arithmétique ou géométrique : rappels

Définition 6 :
Une suite u de premier terme u_0 et de raison r est **arithmétique** si et seulement si, pour tout entier n, on a

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

Exemple :
Léa dépose 100€ sur son compte. Tous les ans il ajoute 10€ . Si on note u_n l'argent disponible sur le compte de Léa au bout de la $n^{\text{ième}}$ année. On a :

$$\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = u_n + 10 \end{cases}$$

u est donc une suite arithmétique de raison 10 et de premier terme 100.

Définition 7 :
Une suite u de premier terme u_0 et de raison q est **géométrique** si et seulement si, pour tout entier n, on a

$$\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$$

Exemple :
Max dépose 100€ sur son compte. Tous les ans il gagne 3% de plus. Si on note v_n l'argent disponible sur le compte de Léa au bout de la $n^{ième}$ année, on a :

$$\begin{cases} v_0 = 100 \\ v_{n+1} = v_n \times 1,03 \end{cases}$$

v est donc une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme 100.

On considère désormais une suite arithmétique (u_n) de raison r.

Propriété 1 :
Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, on a
- Relation entre u_n et u_p :
$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$
- En particulier :
$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

Exemple :
Au bout de 20 ans, Léa dispose de 300€ sur son compte. En effet $u_n = 100 + 10n$ et donc : $u_{20} = 100 + 10 \times 20 = 300$

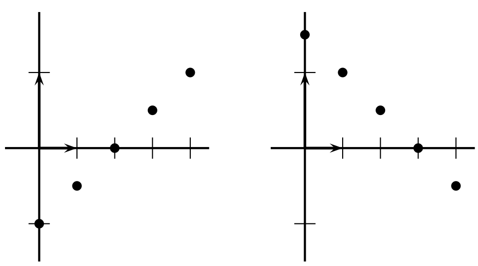
On considère désormais une suite géométrique (u_n) de raison q.

Propriété 2 :
Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, on a
- Relation entre u_n et u_p :
$$\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$$
- En particulier :
$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$$

Exemple :
Au bout de 20 ans, Max dispose de $180,61$€ sur son compte. En effet $v_n = 100 \times 1,03^n$ et donc : $v_{20} = 100 \times 1,03^{20} = 180,61$

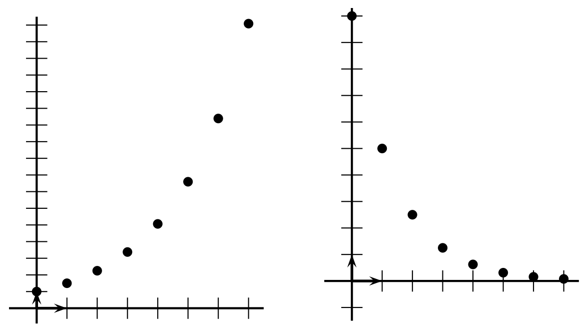
Représentation graphique dans le plan :
Ce sont les points d'abscisse entière positive de la droite de coefficient directeur r et passant par le point de coordonnées $(n_0; u_{n_0})$

Exemple :
$u_0 = -1$ et $r = 0.5$, $v_0 = 1$ et $r = -0.5$



Représentation graphique dans le plan :
Si $q > 0$, ce sont les points d'abscisse entière positive d'une courbe exponentielle.

Exemple :
$u_0 = 1$ et $r = 1.5$, $v_0 = 5$ et $r = 0.5$



Théorème 4 :
- Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si $r = 0$ alors (u_n) est constante ;
- Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemple :

$r = 10 > 0 \Longleftrightarrow$ la suite (u_n) est croissante

Théorème 5 :
Soit (u_n) une suite définie par : $u_n = q^n$ (avec $q > 0$) alors :
- Si $q \in [0;1[$ alors (u_n) est décroissante et convergente vers 0, ie $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
- Si $q = 1$ alors (u_n) est constante égale à 1
- Si $q > 1$ alors (u_n) est croissante et divergente vers $+\infty$, ie la $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exemple :

$q = 1,03 > 1 \Longleftrightarrow$ la suite (v_n) est divergente

Théorème 6 :
La somme S de n termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme p et de dernier terme d est :

$$\boxed{S = n \times \frac{p+d}{2}}$$

Exemple :

$$u_{10} + u_{11} + ... + u_{20} = 11 \times \frac{u_{10} + u_{20}}{2} = 2200$$

Théorème 7 :
La somme S de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme p est :

$$\boxed{S = p \times \frac{1-q^n}{1-q}}$$

Exemple :

$$v_1 + v_2 + ... + v_{20} = v_1 \times \frac{1-1,03^{20}}{1-1,03} = 2767,65$$

Application :
Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail. [a]

1er contrat :
Un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 5€ par mois jusqu'à la fin du bail.

2ème contrat :
Un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois juqu'à la fin du bail.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois (i.e du 36ème mois).
3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ?

a. Un bail est un contrat de location

Solution :

1. On considère la suite (u_n) arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $u_1 = 200$ et la suite (v_n) géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $v_0 = 200$.
   Pour le premier contrat le loyer du deuxième mois et du troisième mois sont donnés par u_2 puis u_3 :

   $$u_2 = u_1 + 5 = 200 + 5 = 205€ \qquad u_3 = u_2 + 5 = 205 + 5 = 210€$$

   Pour le deuxième contrat le loyer du deuxième mois et du troisième mois sont donnés par v_2 puis v_3 :

   $$v_2 = v_1 \times 1,02 = 200 \times 1,02 = 204€ \qquad v_3 = v_2 \times 1,02 = 204 \times 1,02 = 208,08€$$

2. Le loyer du dernier mois est donnée par u_{36} pour le premier contrat et v_{36} pour le deuxième contrat :

   $$u_{36} = u_1 + (36-1) \times 5 = 200 + 35 \times 5 = 375€ \qquad v_{36} = v_1 \times 1,02^{35} = 200 \times 1,02^{35} \simeq 400€$$

3. Pour cela il faut calculer la somme des 36 premiers loyers i.e il faut calculer S_1 et S_2 où :

   $$S_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{36} = \frac{36 \times (200 + 375)}{2} = 18 \times 575 = 10350€$$

   $$S_2 = v_1 + v_2 + \cdots + v_{36} = 200 \times \frac{1 - 1,02^{36}}{1 - 1,02} \simeq 10398€$$

   Donc le premier contrat semble plus avantageux et permettrait de réaliser une économie d'environ 40€

Exercices du livre :

1 à 9 p 307 sur la somme de termes consécutifs

Exercices du livre :

16 p 308 + 39 + 42 + 43 + 46-47 + 60 + 61 p 313

IV-2 Arithmético-géométrique

voir p300

Exercices du livre :

62 à 64 p 313 + 78 + 79

IV-3 Récurrente d'ordre 2

Pb p 302 + TP 4 p 305

Exercices du livre :

65 à 67 p 314 + 85 à 88 p 317

Faire des annales ...