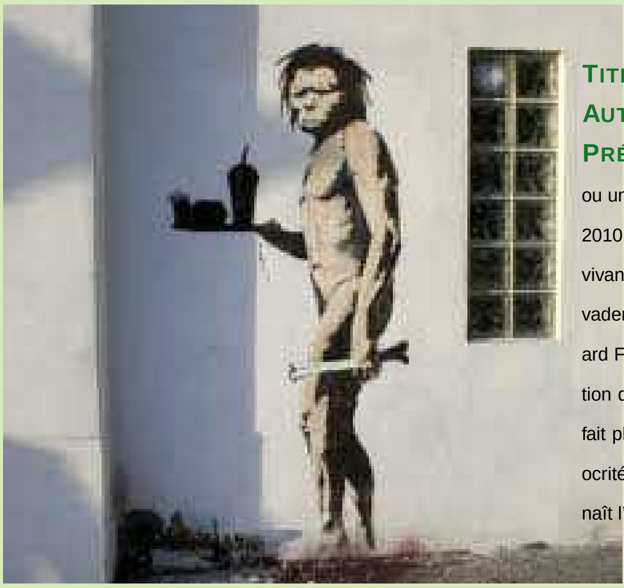
Chapitre 7

Géométrie dans l'espace

Hors Sujet



Titre : « Faites le mur »

Auteur : Banksy

Présentation succinte de l'auteur : Faites le mur ! est un film (?) ou un documentaire (documenteur !) réalisé par Banksy, sorti en salle le 15 décembre 2010. Thierry Guetta, un commerçant français excentrique, documentariste amateur vivant à Los Angeles, présenté dans le film comme le cousin de l'artiste Space Invader, aurait amassé une considérable archive d'interviews et d'action de Zevs, Shepard Fairey, André etc. A mesure qu'il filme de manière compulsive la nouvelle génération de l'art urbain, son obsession pour Banksy, le célèbre pochoiriste britannique se fait plus dévorante. Ils se rencontrent enfin. Banksy incite Guetta - au vu de la médiocrité de ses productions audiovisuelles - à se tourner vers l'art urbain. C'est alors que naît l'artiste Mr Brainwash.

Document réalisé à l'aide de LaTeX

Auteur : C. Aupérin

Site : wicky-math.fr.nf

Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »

THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

LEÇON 7

Géométrie dans l'espace

Résumé

De nombreux problèmes économiques font intervenir plusieurs variables.
Si le problème étudié présente deux variables, et que l'on peut exprimer l'une d'elle en fonction de l'autre, le phénomène peut se visualiser dans le plan.
C'est le cas des coûts, fonction de la quantité produite, des quantités demandées par les consommateurs sur le marché, fonction du prix, du prix suivant la quantité offerte par les producteurs ...
Mais il arrive qu'une troisième variable apparaisse, fonction des deux autres ; on peut alors faire une représentation dans l'espace. c'est le cas d'un budget dépendant de deux quantités (ou de deux prix), d'un indice d'utilité fonction de deux biens consommés, d'une production dépendant du travail et du capital investi ...
Bien sûr, lorsque trois variables interviennent, la visualisation dans l'espace peut aider à comprendre. Les problèmes à plus de trois variables nécessitent souvent le calcul matriciel, mais cela ne fera pas partie du programme de cette année.
En particulier, un problème de programmation linéaire peut se visualiser dans l'espace.

I) Repérage dans l'espace : Rappels et compléments

Dans tout le chapitre, on munit l'espace d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

I-1 Exemple d'introduction

Travail de l'élève **1.** Une petite entreprise d'aliments pour bétail produit deux types d'aliments A et C. Le programme de fabrication tient compte des contraintes suivantes :

Aliment	Poids en kg	Temps en minutes par kg	Dose de protéines par kg
A	x	5	2
C	y	10	1
Contrainte	Maximum 5	Maximum 40	Maximum 8

De plus, le bénéfice est de 1.5€ par kg d'aliment A et de 2€ par kg d'aliment C.

1. Exprimer les contraintes sous forme d'inégalités en x et y.

2. Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de l'espace, comment se représentent l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant $x+y=5$?
Représenter ces points (échelle 1cm sur chaque axe).
Où se situent les points vérifiant $x+y\leq 5$?

3. Interpréter et représenter de même les autres contraintes sur des graphiques différents.
4. Exprimer le bénéfice $B(x;y)$ en fonction de x et y.
   Quel est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $z = B(x;y)$? Le représenter sur un graphique.
5. Expliquer comment graphiquement on peut trouver la solution de ce problème de programmation linéaire.

I-2 Coordonnées de point, de vecteur

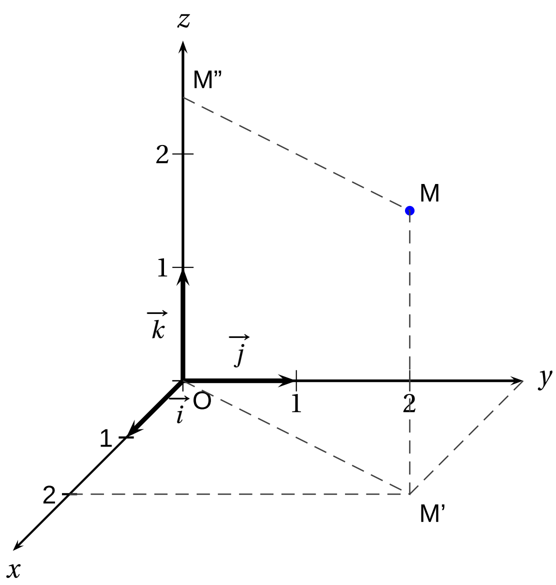
Théorème 1 :
Pour tout point M il existe un unique triplet $(x;y;z)$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

On appelle ce triplet les coordonnées de M, respectivement nommées *abscisse*, *ordonnée* et *côte* de M.

$(x;y;z)$ sont aussi les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{OM}$. On note souvent : $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Exemple :
Placer le point $M(2;3;2.5)$ dans un repère de l'espace orthonormé.



Preuve

La parallèle à (OK) passant par M coupe le plan (OIJ) de repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ en M' de coordonnées $(x;y)$ dans ce repére.
La parallèle à (OM') passant par M coupe l'axe (OK) en M''. Il existe donc un nombre z tel que $\overrightarrow{OM''}=z\vec{k}$.
De plus, $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{M''M}$ donc le quadrilatère $OM'MM''$ est un parallélogramme et

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{OM''}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

Remarques :

- Deux points distincts définissent une droite
- Trois points distincts non alignés définissent un plan. Autrement dit, A, B et C définissent un plan (ABC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, ie si leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Exercice 1 **:**

Soit les points $A(5;0;0)$, $B(2;6;0)$ et $C(0;2;4)$. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan et le représenter.

I-3 Equation de plan

I-3.1 Cas général

Propriété 1 :

- Tout plan de l'espace admet une équation du type $ax+by+cz=d$ où a, b, c et d sont des réels.
- Réciproquement : Soient a, b, c et d des réels tels que l'un moins des réels a, b ou c n'est pas nul. L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que $ax+by+cz=d$ est un plan.

Remarques :

- Si a, b et c sont tous nuls, deux cas se présentent :
  - $d=0$ et la relation $ax+by+cz=d$ est toujours vérifiée.
  - $d\neq 0$ et la relation $ax+by+cz=d$ n'est jamais vérifiée.
- Un plan admet une infinité d'équations :
  Si $ax+by+cz=d$ est l'équation d'un plan, alors $k(ax+by+cz)=kd$, où $k\in\mathbb{R}^*$ est aussi une équation de ce plan.
- Si $d\neq 0$, le plan ne passe pas par l'origine du repère. On peut alors toujours se ramener à une équation de la forme $a'x+b'y+c'z=1$.

Exemple :

Les équations $-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{5}{3}z=-4$, $2x-y+5z=12$ et $\frac{1}{6}x-\frac{1}{12}y+\frac{5}{12}z=1$ sont trois équations du même plan.

I-3.2 Cas particuliers

Proposition 1 :
- Le plan (xOy) a pour équation $z=0$. Un plan parallèle à (xOy) a une équation du type $z=k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- Le plan (yOz) a pour équation $x=0$. Un plan parallèle à (yOz) a une équation du type $x=k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- Le plan (xOz) a pour équation $y=0$. Un plan parallèle à (xOz) a une équation du type $y=k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

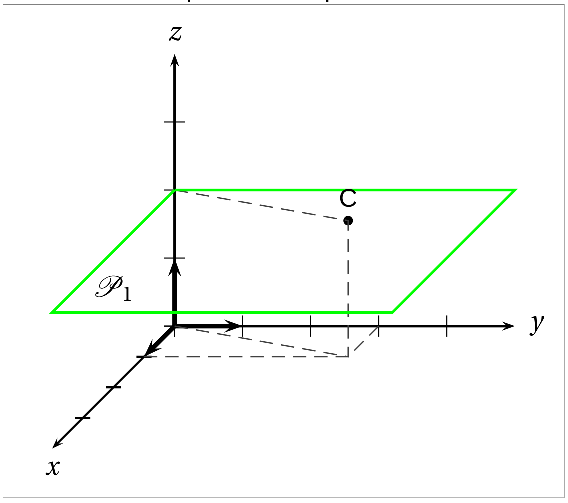
Preuve

(xOy) est exactement l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace dont la côte z vaut 0.
Un plan $\mathscr{P}$ parallèle à (xOy) passant par $A(0,0,k)$ est exactement l'ensemble des points $M(x;y;z)$ dont la côte z vaut k.

Exemples :

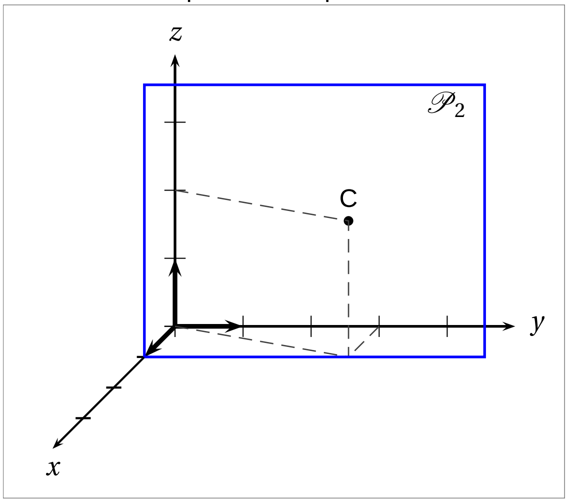
Soient $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ trois plans de l'espace respectivement parallèles aux plans $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$, $\left(O;\vec{\imath};\vec{k}\right)$ et $\left(O;\vec{\jmath};\vec{k}\right)$ et passant par le point $C(1;3;2)$.

Plan parallèle au plan ......



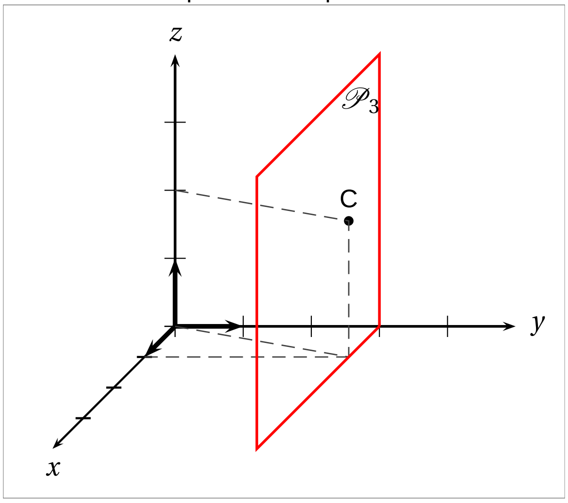
Le plan $\mathscr{P}_1$ a pour équation ......

Plan parallèle au plan ......



Le plan $\mathscr{P}_2$ a pour équation ......

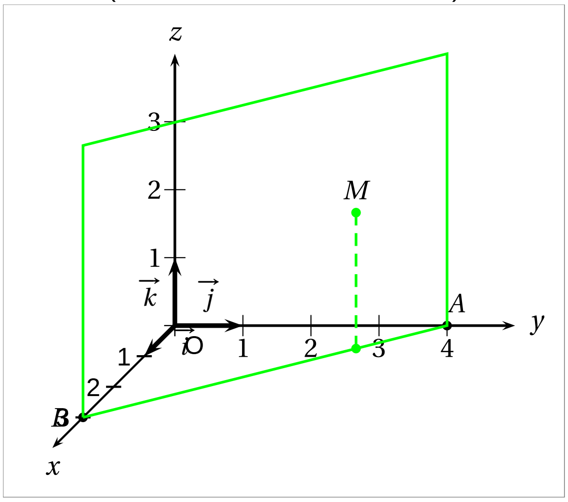
Plan parallèle au plan ......



Le plan $\mathscr{P}_3$ a pour équation ......

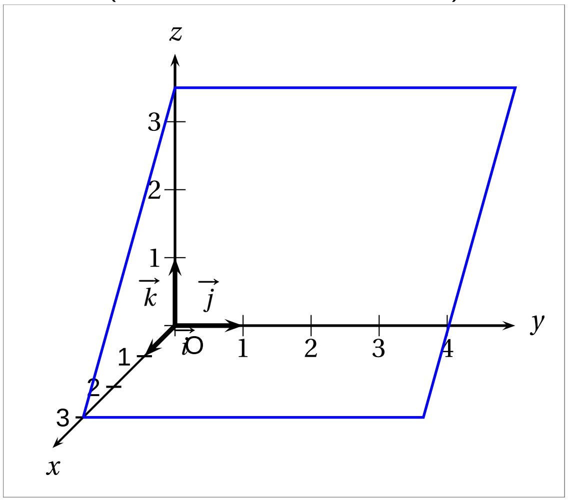
Proposition 2 :
Un plan parallèle à l'axe (Oz) a une équation du type $ax+by=d$. Un plan parallèle à l'axe (Ox) a une équation du type $by+cz=d$. Un plan parallèle à l'axe (Oy) a une équation du type $ax+cz=d$.

Plan parallèle à l'axe ......
(sécants aux deux autres axes)



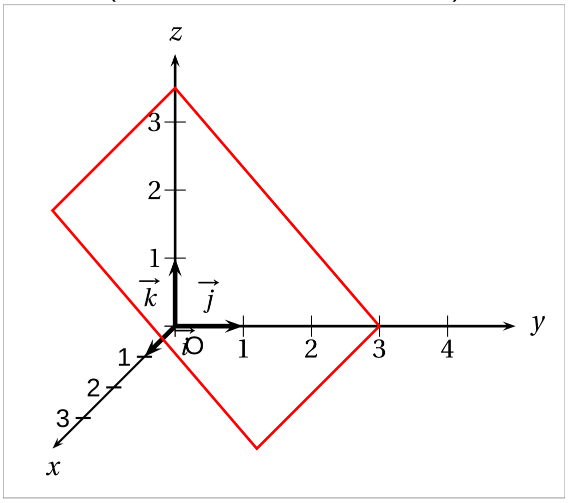
Le plan a une équation de la forme ....
(où a et b ne sont pas tous les deux nuls)

Plan parallèle à l'axe ......
(sécants aux deux autres axes)



Le plan a une équation de la forme ....
(où a et c ne sont pas tous les deux nuls)

Plan parallèle à l'axe ......
(sécants aux deux autres axes)



Le plan a une équation de la forme ....
(où b et c ne sont pas tous les deux nuls)

Attention !

Dans un plan, $ax+by=d$ est une équation de droite. Dans l'espace, c'est une équation de plan parallèle à l'un des axes.

Preuve

Un plan $\mathscr{P}$ parallèle à l'axe (Oz) est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que le projeté orthogonal M' de M sur (xOy) soit sur la droite (AB), où A et B sont les points d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et respectivement des axes (Ox) et (Oy). L'équation du plan $\mathscr{P}$ dans l'espace est alors l'équation de (AB) dans le plan (xOy). Il s'agit donc d'une équation du type $ax+by=d$.

Remarque : Un plan parallèle à un axe de coordonnées est déterminé par son intersection avec le plan de coordonnées formé par les deux autres axes.

Exercice 2 :

Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ les plans d'équation respectives $4x+3y=12$ et $3y+2z=12$.
Représenter ces plans et leur intersection.

I-4 Equation de droites

Proposition 3 :

Soient deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de l'espace d'équation respective $ax+by+cz=d$ et $a'x+b'y+c'z=d'$, avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ et $(a';b';c')\neq(0;0;0)$.
Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles si et seulement si les coefficients a, b, c et a', b', c' sont proportionnels.
Sinon, les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants suivant une droite $\mathscr{D}$.
Cette droite est alors définie par les deux équations $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$

Exemple :

Les plans d'équation $3x+2y-5z=1$ et $-6x-4y+10z=3$ sont parallèles.
Le plan d'équation $5x-2y+4z=1$ les coupent selon les droites définies par : $\begin{cases} 3x+2y-5z=1 \\ 5x-2y+4z=1 \end{cases}$ et $\begin{cases} -6x-4y+5z=3 \\ 5x-2y+4z=1 \end{cases}$

Exercice 3 :

Représenter dans un même repère le plan (ABC) et les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ des exemples précédents. Représenter leur droite d'intersection en précisant les systèmes définissant chacune d'elle. En déduire le point d'intersection des trois plans.

Exercices du livre :

n° 20-21 p 334 (Lecture de coordonnées de points)
n° 18-19-23-26 p 334 (coordonnées de points et équations de plans particuliers)
n° 35 p 336 (représentation d'un plan)
n° 28 à 33 p 334 (systèmes)
n° 37 à 40 p 336 (droites et positions relatives de plans)
TD 1 p 327

Exercices du livre :

Antilles-Guyane Septembre 2003 en DM ??

II) Fonctions à deux variables

II-1 Exemple d'introduction

Problème résolu « Production Optimale » à photocopier p 326

II-2 Fonctions à deux variables et surfaces

Définition 1 :
Soient deux intervalles I et J. Si pour tout couple $(x;y)$ avec $x \in I$ et $y \in J$, on peut associer un réel z, alors on définit une fonction f de deux variables x et y telle que

$$f: \begin{array}{rcl} I \times J & \to & \mathbb{R} \\ (x;y) & \mapsto & z = f(x,y) \end{array}$$

Exemples :
La production, dépendant entre autres paramètres du capital investi et du travail fourni, est souvent modélisée par des fonctions du type : $z = Cx^{\alpha}y^{\beta}$, où C est une constante liées aux autres paramètres, α et β sont des réels, la variable x mesure le travail et la variable y mesure le capital. Ces fonctions sont des fonctions de Coob-Douglas.
Par exemple, les fonctions

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ (x;y) & \mapsto & xy \end{array}, \quad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ (x;y) & \mapsto & x^2y \end{array}, \quad \text{et} \quad h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ (x;y) & \mapsto & \sqrt{x}y \end{array}$$

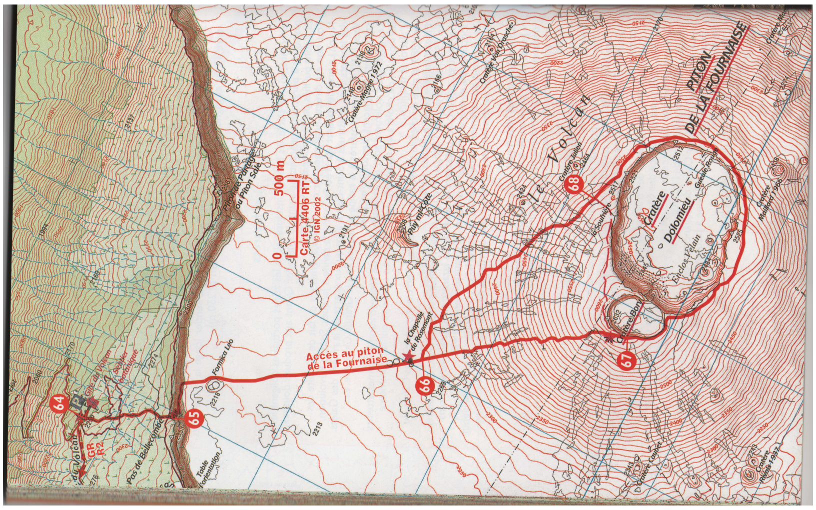
sont des fonctions de Coob-Douglas. Voir leur représentation p 321.

Définition 2 :
Soit f une fonction à deux variables définie sur un ensemble $I \times J$.
Dans un repère de l'espace, la représentation graphique de f est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que :

$$\begin{cases} x \in I \\ y \in J \\ z = f(x;y) \end{cases}$$

On dit que cet ensemble est la surface d'équation $z = f(x;y)$.

II-3 Courbe de niveau



Sur les cartes topographiques IGN, chaque point peut-être repéré par sa longitude, sa latitude et son altitude par rapport au niveau de la mer.

Les points de même altitude sont reliés entre eux et forment une courbe de niveau. Celles-ci sont obtenues plus exactement ainsi :

– En découpant une zone géographique par des plans horizontaux équidistants (souvent tous les 20 m)

– En projetant les intersections sur un plan de référence de façon à obtenir une carte.

Remarques :

– Le contour extérieur d'une île est la ligne de niveau 0.

– Des lignes serrées traduisent une forte pente (en montée ou en descente).

– Pour faciliter la suite du chapitre, on pourra voir les plans comme des droites mises les unes à côté des autres (à la façon d'un radeau) et les surfaces commes des lignes de niveaux mises côte à côte.

Définition 3 :

Pour tout réel k, la section de la surface représentative d'une fonction f à deux variables par le plan d'équation $z = k$ s'appelle la ligne (ou courbe) de niveau k de f.

Exercices du livre :

n° 42 à 44 p 336 (lectures graphiques)

n° 45-46-48 p 337 (nature de courbes de niveau)

n° 50-51-61-62 p 338 (problèmes)

TD 2 p 328

Exercices du livre :

France Métropolitaine Juin 2007

Polynésie Juin 2007

Nouvelle-Calédonie Novembre 2005

Nouvelle-Calédonie Novembre 2004

Asie Juin 2004