Chapitre 1

Graphes, Matrices et ProbabilitÃl's

Hors Sujet

Titre : « Autoportrait (1937-38, complété en 1960) » et « Mélancolie () »
Auteur : Joan Miro
Présentation succinte de l'auteur : Joan Miro (1894 - 1984) est ...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Ce qui est important, ce n'est pas de finir une oeuvre, mais d'entrevoir qu'elle permette un jour de commencer quelque chose* »

JOAN MIRO

LEÇON 1

Graphes, Matrices et ProbabilitÃľs

Poisson chantant (?)

Résumé

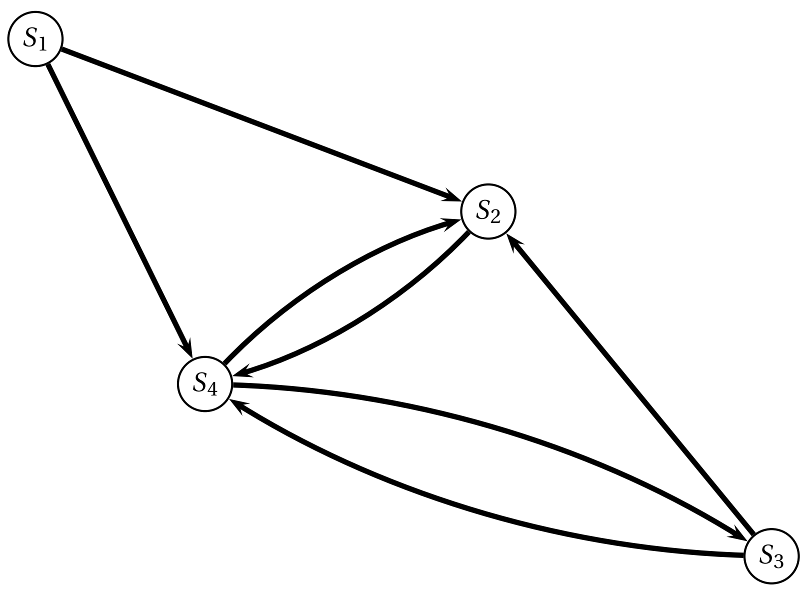
On a déjà vu que la théorie des graphes nous permettait de résoudre certains problèmes, comme celui de composition de matches, celui de coloration de cartes, et celui de chemin eulérien. Dans le premier chapitre, nous avons essentiellement travaillé sur les bases et le vocabulaire.

Mais la théorie des graphes permet de résoudre des problèmes bien plus complexe. En particulier, nous allons voir ici comment coder un graphe de manière à le rendre utilisable par un ordinateur...

I) Matrice associée à un graphe

I-1 Exercice d'introduction

Un parcours de santé est aménagé pour les sportifs dans le parc d'une ville. Il est composé de chemins à sens unique, et de quatre points de repère, tous distants de 500 mètres, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



Sur ce schéma du parcours de santé, S_1 désigne l'entré et S_4 la sortie. On fera l'hypothèse que tout trajet commenceren S_1 et finit en S_4.
Combien y a-t-il de trajets différents de

- 1 km ?
- 1.5 km ?
- 2 km ?
- 2.5 km ?

I-2 Définition et propriété

Définition 1 :
La matrice associée à un graphe d'ordre n (ou matrice d'adjacence) est la matrice carré $n \times n$ dont l'élément situé sur la ligne i et la colonne j est égal au nombre d'arêtes allant du sommet i vers le sommet j (ou les reliant simplement, dans le cas de graphe non orienté).

Exemples :

Dans le cas précédent, la matrice associé au graphe est la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
La première colonne est remplie de 0, car aucune arête d'arrive en S_1.
Il y a deux 1 sur la première ligne : cela traduit le fait que le sommet S_1 est à l'origine de deux arêtes.

Si on oublie l'orientation du graphe précédent, la matrice associée est alors

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarques :

- Dans un graphe orienté, la somme des termes est égale au nombre d'arrêtes. Si le graphe est non orienté, la somme des termes vaut le double du nombres d'arêtes.
- Dans le cas d'un graphe non orienté, la matrice d'adjacence est symétrique.
- Une matrice décrit complètement un graphe. C'est le moyen le plus simple pour coder un graphe de façon utilisable pour un ordinateur.

Exercices du livre :
n° 21 - 23 - 25 - 27 - 29 p 243 (du graphe à la matrice)

Exercices du livre :
n° 30 - 32 - 35 p 243 (de la matrice au graphe) + 2 p 259 + 21 p 261

Travail de l'élève **1.** On reprend l'exemple du parcours de santé.

1. Calculer M^2 à la main. Vérifier à la calculatrice.
2. Calculer M^3 à la main. Vérifier à la calculatrice.
3. Faire de même pour M^3 et M^4.
4. Observer dans chaque cas alors le terme $m_{1,4}$. Que constatez-vous ?

5. Pouvez-vous trouver par avec la calculatrice le nombre de parcours reliant S_1 à S_4 de longueur 5 km ?

Théorème 1 : *Admis*

Soit un graphe de matrice A.
Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice i, j de la matrice A^n.

Exemple :

Dans l'exemple précédent, déterminer le nombre de chemins de 7 arêtes reliant S_1 à S_4. A quelle distance cela correspond-t-il ?
En admettant que le parcours soit non orienté, donner le nombre de chemins de 7 arêtes reliant S_1 à S_1 ? S_3 à S_2 ?

Exemple :

On considère le parcours de santé non orienté. Un sportif décide d'emprunter chaque jour un nouveau trajet de 2km : combien de jours peut-il tenir cet engagement, sachant qu'il part toujours de S_1 pourarriver en S_4 ?

Exercices du livre :

n° 40-41-46 p 244

I-3 Plus courte chaîne

Définition 2 : *Rappel*

La distance entre deux sommets est la plus courte longueur de chaîne qui les relient.
Le diamètre d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets, parmi toutes les paires de sommets.

Corollaire 1 :

Soit un graphe de matrice A. La distance entre deux sommets i et j est le plus petit entier n tel que le terme d'indice i, j de A^n soit non nul.

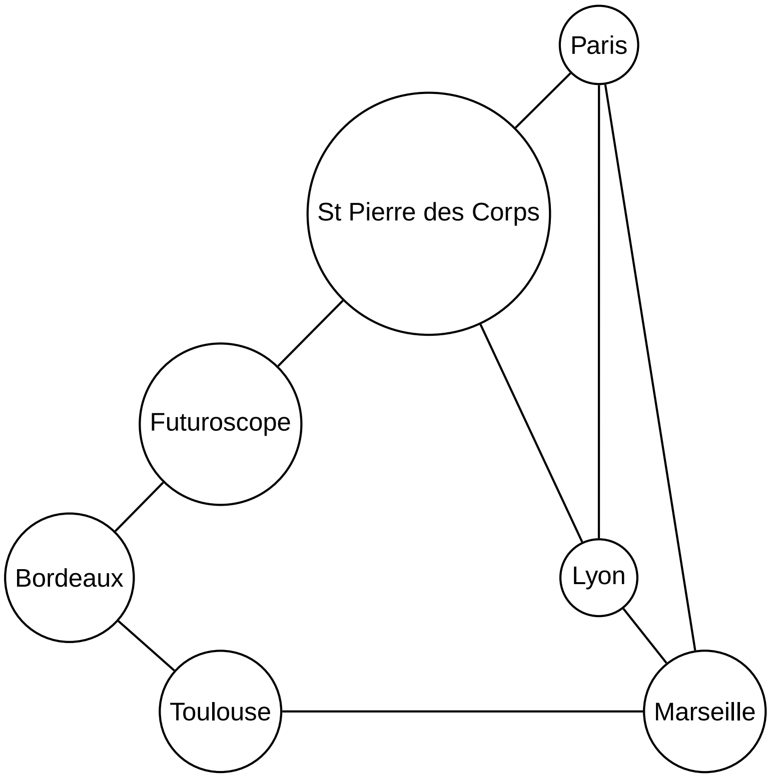
Exemple :

Utiliser cette propriété pour donner le diamètre du graphe représentant le parcours de santé.

II) Graphes Pondérés

II-1 Exemple

Un voyageur souhaite se rendre de Marseille au Futuroscope en train. D'une carte du réseau TGV, il a extrait le schéma ci-contre :



Les guides donnent par ailleurs les temps suivants :

Marseille-Lyon : 1h50	Lyon-Paris : 2h15	St Pierre des Corps-Futuroscope : 30'
Marseille-Paris : 3h	Lyon-St Pierre des Corps : 3h	Futuroscope-Bordeaux : 2h10
Marseille-Toulouse : 3h	Paris-St Pierre des Corps : 1h	Toulouse-Bordeaux : 2h10

Quel trajet conseilleriez-vous à ce voyageur ? (on négligera dans cet exercice les temps de correspondance)

II-2 Définitions

Définition 3 :
Un graphe est dit pondéré lorsque chacune de ses arêtes est affectée d'un nombre appelé poids.

Remarque : Cette année, les poids seront toujours positifs, mais ce n'est pas forcément le cas.

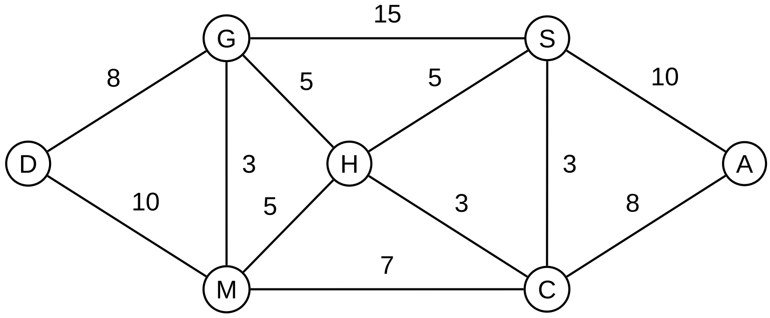
Définition 4 :
Le poids d'une chaîne est la somme des poids des arêtes qui la composent.
Une plus courte chaîne entre deux sommets donnés est une chaîne de poids minimal parmi toutes les chaînes reliant ces deux sommets.

Remarque : Dans un graphe connexe avec des poids positifs, il y a forcément une plus courte chaîne entre n'importe quels sommets du graphe, mais celle-ci n'est pas toujours unique.

Exemple :
Dans l'exemple précédent, la plus courte chaîne reliant Marseille au Futuroscope est : ...

II-3 Algorithme de Dijkstra (1959)

Les données sont un graphe G et un sommet de départ D et un d'arrivée A.



1. **Initialisation** : on fixe à 0 la marque de D.
   Marquer chacun des sommets adjacents à D par le poids de l'arête joignant ce sommet à D.
   Marquer les autres sommets par $+\infty$.
2. Regarder tous les sommets de marque non fixée. Repérer celui qui a la plus petite marque et la fixer. Soit X ce sommet.
   Pour chaque sommet Y adjacent à X, et de marque non fixée, calculer la somme de la marque de X et du poids de l'arête reliant X à Y.
   Si cette somet est inférieur à la marque de Y, barrer cette marque et la remplacer par cette somme, en indiquant entre parenthèses la provenance de cette nouvelle marque, dite améliorée.
3. **Itération** : On recommence la deuxième étape jusqu'à épuisement des sommets.

Exemple :

Dans l'exemple précédent, cela donne :
- Étape 1 : sélection de D.
- Marquage de G (8 de D) et de M (10 de D), les autres sommets étant marqués à $+\infty$.
- Étape 2 : Sélection de G.
- Marquage de H (13 de G) et de S (23 de G) *conservation de M.*
- Étape 2 (bis) : Sélection de M.
- Marquage de C (17 de M) ; *conservation det H et de G*
- Étape 2 : Sélection de H.
- Marquage de S (18 de H) et de C (16 de H)
- Étape 2 : Sélection de C
- Marquage de A (24 de C) ; *conservation de S*
- Étape 2 : Sélection de S
- *conservation de A*
- Étape 3 : sélection de A

La plus courte chaîne entre D et A est donc D-G-H-C-A

Remarque : On peut placer les opérations successives au fur et à mesure dans un tableau (voir p 275).

Exercices du livre :

n° 5 à 15 p 281 + annales 1 et 2 de la feuille d'exo

III) Graphes étiquetés ou Automates

III-1 Exemple

Activité 7 p 270

III-2 Définition

Définition 5 :

Un graphe **étiqueté** est un graphe orienté dans lequel chacune de ses arêtes est affectée d'étiquettes qui peuvent être des lettres ou des symboles, et qui possède un sommet initial et un sommet final (toujours indiqués).
L'ensemble de ces symboles est appelé **alphabet**.
Un **mot** est une suite fini de symboles de l'alphabet.
Un mot est dit **reconnu** par un graphe étiqueté (ou accepté come code d'accès) s'il existe un chemin orienté du graphe, partant du sommet initial et arrivant au sommet final, et étiqueté par ce mot.
Un **langage** associé à un graphe étiqueté est l'ensemble des mots reconnus par ce graphe.

Remarque : Le contenu de ce chapitre se borne à faire comprendre ces notions de mot reconnu par un graphe étiqueté et de langage associé à un graphe étiqueté, et à les faire fonctionner dans des cas simples.
Aucun théorème n'est au programme. Il ne faudrait pas s'imaginer que c'est parce qu'il n'y en a pas ! Les graphes étiquetés, ou automates, ont donné lieu depuis une cinquantaine d'années à une théorie mathématique abstraite, riche et diversifiée, possédant de nombreuses applications.
Ils sont en particulier fondamentaux en informatique, et c'est pourquoi on a jugé utile de les faire connaître aux élèves de terminale.

Exemple :

Voir p 275 et activité 6 p 275

Exercices du livre :

n° 16-17 p 281 + 50 p 288 + 3 p 279

IV) Graphes probabilistes

IV-1 Exemple

Partie A : Des puces savantes ...

Mario est un dresseur de puces qui a un excellent numéro de cirque : il possède 100 puces savantes qu'il fait sauter en l'air en cadence.
Il place deux podiums l'un à côté de l'autre : un petit (P) et un grand (G).
Il a alors constaté que :

- Parmi les puces posées sur le grand podium, 80% retombent sur place et 20% sur le petit.
- Parmi les puces posées sur le petit podium, 40% retombent sur place et 60% sur le grand.

1. Représenter la situation par un graphe pondéré. Les sommets représentent les podiums, les arêtes les sauts de puces et leur poids leurs probabilités.
2. Expliquer pourquoi la somme des pondérations des arêtes partant d'un des sommets est forcément 1.
3. A partir de la situation où les 100 puces sont sur le podium G au départ, indiquer la répartition des puces après le 1^{er} saut, puis après deux sauts (on pourra utiliser un arbre pondéré).

Partie B : Du côté des matrices

Au départ, les puces sont toutes sur le podium G. On a donc une répartition que l'on peut noter sous la forme d'une matrice ligne $P_0 = \begin{pmatrix} 100 & 0 \end{pmatrix}$.
On note M la matrice associée au graphe précédent (en rangeant G et P dans cet ordre).

1. Vérifier à la main que le produit $P_0 \times M$ permet de retrouver la répartition des puces après le premier saut. On notera P_1 cette répartition.
2. Vérifier à la main que le produit $P_1 \times M$ permet de retrouver la répartition des puces après le deuxième saut. On notera P_2 cette répartition.
3. Vérifier à la calculatrice que $P_2 = P_0 \times M^2$.
4. En déduire un calcul matriciel permettant de connaître la répartition des puces après 3, 4 puis 5 sauts.

Partie C : Vers un état stable

1. Dans le cas où toutes les puces sont sur le podium G au départ, déterminer à l'aide de la calculatrice la répartition des puces après 10 sauts, puis 15. Que sembe-t-il se passer ?
2. a. Dans le cas où toutes les puces sont sur le podium P au départ, indiquer la nouvelle répartition initiale P_0
   b. Déterminer les 5 répartitions suivantes. Que peut-on en déduire ?
3. Reprendre la question 2 avec une répatition de votre choix.

Partie C : Pour aller plus loin

On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}$ avec $0 \leq x \leq 1$ correspondant à une répartiton donnée.

1. Effectuer à la main le calcul $P \times M$
2. Déterminer la valeur de x pour laquelle $P = P \times M$
3. Comparer le résultat obtenu avec celui conjecturé à la fin de la partie C.

IV-2 Définition

On considère une expérience aléatoire à deux ou trois issues possibles, que l'on répète n fois.
A chaque étape k, on définit une loi de probabilité sur l'ensemble des issues possibles, appelée un **état de probabiliste**, représentée par une matrice ligne

$$P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$$

On suppose que le passage d'un état au suivant est toujours régi de la même façon. Ce passage se décrit par un graphe probabiliste ou une matrice de transition.
On peut aussi applicquer cette notion dans le cas de la répartition d'un ensemble en deux ou trois parties et son évolution par étapes successives.

Remarque : Ceci se généralise à n'importe quel nombre fini d'issues possibles, mais cela n'est pas au programme.

Définition 6 :
Un graphe probabiliste est un graphe orienté et pondéré tel que :
– Les sommets du graphe sont les issues possibles d'une expérience aléatoire
– Le poids d'une arête orientée partant du sommet i et allant vers le sommet j est la probabilité conditionnelle d'obtenir l'issue j à l'étape $n+1$ sachant que l'on a obtenu i précédente (à l'étape n).
La matrice associée à un graphe probabiliste s'appelle la matrice de transition du graphe.

Remarque : Nécessairement, la somme des poids des arêtes partant d'un même sommet vaut 1.

Propriété 1 :
La matrice de transition d'un graphe probabiliste est une matrice carré dont les éléments sont les poids des arêtes du graphe lorsqu'elles existent, et sont égaux à 0 sinon.
La somme des éléments de chaque ligne est égale à 1.
L'état probabiliste à l'étape $n+1$ s'obtient par $P_{n+1} = P_n \times M$.

Exemple :
Un élève peut se rendre à son lycée par trois chemins A, B et C. Chaque jour, il peut changer ou non d'itinéaire :
– S'il passe par le chemin A, le lendemain, il prend le chemin B aveec la probabilité 0.5 et le chemin C avec la probabilité 0.2.
– S'il passe par le chemin B, le lendemain, il prend le chemin A aveec la probabilité 0.1 et le chemin C avec la probabilité 0.6.
– S'il passe par le chemin C, le lendemain, il prend le chemin A aveec la probabilité 0.6 et le chemin B avec la probabilité 0.2.

1. Dessiner le graphe probabiliste correspondant à cette expérience, et donner sa matrice de transition.

Définition 7 :
Un état probabiliste P est stable lorsqu'il reste le même dans la répétition de l'expérience aléatoire décrite par la matrice de transition d'un graphe probabiliste, ie qu'il vérifie $P = P \times M$.

Exercices du livre :
n° 20-21-22 p 283 + 26 p 284

IV-3 Propriétés

Proposition 1 :
Soient M la matrice de transition d'un graphe probabiliste, P_0 la matrice représentant l'état probabiliste initial d'une expérience aléatoire, et P_n la matrice décrivant l'état à l'étape n. Alors, pour tout $n \geq 0$ on a :

$$P_n = P_0 \times M^n$$

Proposition 2 :
Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition n'admet pas de 0, lorsque n devient très grand, l'état probabiliste P_n tend vers un état stable P, indépendant de l'état initial P_0.

Exercice 1 **:**
Deux villes X et Y totalisent à elles deux une population d'un million d'habitants.
La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires. 20% des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5% des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.

1. Sachant qu'en l'année 0, un quart des habitants sont en X , calculer la population de X et de Y au bout de 1, 2, 5 et 10 ans.
2. Que se passe-t-il si l'on suppose que 99% des habitants sont initialement en X ou en Y ?
3. Même question si la population est également répartie entre les deux villes en l'année zéro ?
   Que constate-t-on ?
4. On étudie le cas général. On note $P_n = \begin{pmatrix} X_n & Y_n \end{pmatrix}$ le vecteur ligne qui décrit la population de X et Y au bout de n années.
   a. Déterminer la matrice M de transition du graphe.
   b. Exprimer P_1 et P_2 en fonction de M et P_0
   c. A l'aide de la formule exprimant P_n en fonction de P_0 et M, trouver l'état stable du problème.

Exercice 2 **:**
Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), sain, c'est-à-dire non malade et non immunisé, (S).
D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :
– étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1 ;
– étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5 ;
– étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8.

1. Tracer un graphe probabiliste pour décrire cette situation et écrire la matrice de transition.
2. Calculer l'état de probabilité de l'individu au bout de trois mois, de six mois, d'un an, de deux ans pour chacune des situations suivantes :
   a. au départ, il est immunisé ;
   b. au départ, il est non malade et non immunisé ;
   c. au départ, il est malade.

Exercices du livre :
n° 30 p 285 + 39 p 286 + 49 p 288 + 58 p 290 + annales 3 à 5