Devoir Maison 2

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. (2 points)

1. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n-4$ divise 6.
2. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n+1$ divise $3n-4$.

Exercice 2. a est un entier relatif, b un entier naturel. (1 point)
Écrire la division euclidienne de -753 par 7.

Exercice 3. La division euclidienne par 7 *(Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes)* (7 points)

1. Trouver le reste de la division euclidienne par 7 de 1991^{2009}.
2. Soient x et y des entiers naturels.
   (a) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7 ?
   (b) Démontrer que 7 divise x^2+y^2 si et seulement si 7 divise x et 7 divise y.
3. Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs à 9 avec $a \neq 0$. On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre sécrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
   On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.
   (a) Vérifier que $10^3 \equiv -1 \pmod 7$
   (b) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Exercice 4. p et q désignent deux entiers naturels tels que $p^2 - 2q^2 = 1$. (2 points)

1. Montrer que p est impair.
2. Montrer que q est pair.

Exercice 5. (8 points)

Partie A : Soit $E = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$
Déterminer les couples $\{a;b\}$ d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de $a \times b$ par 11 soit 1.

Partie B :

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3
   (a) L'entier $(n-1)!+1$ est-il pair [1] ?
   (b) L'entier $(n-1)!+1$ est-il divisible par un entier naturel pair ?
2. Prouver que l'entier $(15-1)!+1$ n'est pas divisble par 15.
3. L'entier $(11-1)!+1$ est-il divisible par 11 ?

Partie C : Soit p un entier naturel non premier $(p \geq 2)$.

1. Prouver que p admet un diviseur q $(1 < q < p)$ qui divise $(p-1)!$
2. L'entier q divise-t-il l'entie r $(p-1)!+1$?
3. L'entier p divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?

[1] On note $n!$ et on lit « factoriel n », le nombre $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$. Par exemple $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.