Correction de l'exercice du DS 3

Exercice 1. (5 points)

1. **A l'aide des transformations**

   (a) Les triangles AMB et BNO sont des triangles rectangles isocèles (en M et N respectivement) de sens direct donc $\theta_1 = (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) \equiv +\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ et $\theta_2 = (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{ON}) \equiv +\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.
   Les similitudes s_1 et s_2 ont des angles de $\frac{\pi}{4}$.
   De plus dans AMB rectangle isocèle en M, d'après le théorème de Pythagore on a $AB^2 = AM^2 + BM^2 = 2AM^2$. Donc $AB = \sqrt{2}AM$ et s_1 est de rapport $k_1 = \sqrt{2}$.
   De même dans OBN rectangle isocèle en N, on a $OB = \sqrt{2}ON$ donc $\frac{ON}{OB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et s_2 est de rapport $k_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   (b) $r(M) = s_2 \circ s_1(M) = s_2(B) = N$ par définition.
   $r(M) = s_2 \circ s_1(I) = s_2(P) = I$ car OPA est un triangle rectangle isocèle (en O) de sens direct.

   (c) r est la composée de deux similitudes directes, donc c'est aussi une similitude directe.
   De plus l'angle de r vaut $\theta \equiv \theta_1 + \theta_2 \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$
   Et $k = k_1 \times k_2 = \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$.
   Le rapport de la similitude directe r vaut 1 et son angle $\frac{\pi}{2}$. C'est une rotation.
   Son centre est son point invariant, c'est-à-dire I.

   (d) $r(O) = P$ car I est le milieu de $[OA]$ et OPA est rectangle en P donc $OI = OP$.
   De plus OPA est isocèle en P de sens direct donc la médiane (IP) est aussi la hauteur et on a $(\overrightarrow{IO};\overrightarrow{IP}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

   (e) On a $r(O) = P$ et $r(M) = N$. Donc l'image par r de la droite (OM) est la droite (PN).
   Comme r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2. **En utilisant les nombres complexes**

   (a) L'écriture complexe de s_1 est $z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-2)+2$.
   L'écriture complexe de s_2 est $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z$.

   (b) On a $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_M - 2) + 2$. Après calculs (à détailler) on trouve $z_M = \frac{9}{4} + \frac{3}{4}i$.
   On a $z_N = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_B$. Après calculs (à détailler) on trouve $z_N = \frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$.

   (c) On a $z_P = 1 - i$. Alors $\arg(\overrightarrow{PN};\overrightarrow{OM}) \equiv \arg\left(\frac{z_N - z_P}{z_M - z_O}\right)$.
   Après calculs (à détailler) on trouve $\arg(\overrightarrow{PN};\overrightarrow{OM}) \equiv arg(i)\,[2\pi]$.
   D'où $(OM) \perp (PN)$.