Devoir maison 5

Exercice 1. (5 points)

Le but de l'exercice est d'étudier certaines proporiétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « Si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \quad (p)$ ».

Partie A : Quelques exemples

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.
2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3. Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division euclidienne de 4^n par 17.
   En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?
5. A l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B : Divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $4^n \equiv 1 \quad (p)$.
2. Soit $n \geq 1$ un entier natuel tel que $4^n \equiv 1 \quad (p)$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \quad (p)$, et r le reste de la division euclidienne de n par b.
   (a) Démontrer que $4^r \equiv 1 \quad (p)$. En déduire que $r = 0$.
   (b) Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ divisible par p si et seulement si n est multiple de b.
   (c) En déduire que b divise $p - 1$.

Exercice 2. (5 points)

Pour chacune des cinq propositions suivanes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

1. **Proposition 1 :** « Pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».
2. **Proposition 2 :** « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0 \quad (6)$ alors $x \equiv 0 \quad (3)$ ».
3. **Proposition 3 :** « L'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples $(4 + 10k; 9 + 24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ ».
4. **Proposition 4 :** « Il existe un seul couple $(a; b)$ de nombres entiers naturels, tel que $a < b$ et $PPCM(a; b) - PGCD(a; b) = 1$
5. Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture $\overline{abc}$ en base dix et N a pour écritue $\overline{bca}$ en base dix.
   Proposition 5 : « Si l'entier M est divisible par 27 alors l'netier $M - N$ est aussi divisible par 27 ».

Exercice 3. (5 points)

Dans chaucn des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = (1+i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3}$$

   On note A le point d'affixe $2i$.
   Affirmation : f est la similitude directe, de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et de rapport 2.
2. **Affirmation :** $1\,991^{2\,009} \equiv 2 \quad (7)$.
3. a et b sont deux entiers relatifs quelconques, n et p sont deux entiers naturels premiers entre eux.
   Affirmation : $a \equiv b \quad (p)$ si et seulement si $na \equiv nb \quad (p)$.
4. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x;y;z)$ vérifient l'équation $z = x^2 + y^2$. On note $\mathscr{S}$ la section de $\mathscr{E}$ par le plan d'équation $y = 3$.
   Affirmation : $\mathscr{S}$ est un cercle.
5. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. $\mathscr{P}$ est la surface d'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$.
   Affirmation : O est le seul point d'intersection de $\mathscr{P}$ avec le plan (yOz) à coordonnées entières.