Devoir maison 4

Exercice 1. (10 points)

Partie A :

1. On a $2009 \equiv 9\,[16] \implies 2009^2 \equiv 1\,[16] \iff 2009^2 - 1 \equiv 0\,[16]$.
   D'où le reste de la division euclidienne de $2\,009^2 - 1$ par 16 est 0.

2. $2\,009^{8\,001} = 2009^{2\times 4000+1} = \left(2009^2\right)^{4000} \times 2009$. Donc d'après la question précédente :
   $2\,009^{8\,001} \equiv 1^{4000} \times 2\,009\,[16] \iff 2\,009^{8\,001} \equiv 2009\,[16]$

Partie B :

1. (a) On a $2009 \equiv -1\,[5] \implies 2009^2 \equiv 1\,[5] \iff 2009^2 - 1 \equiv 0\,[5]$.
   Autrement dit u_0 est divisible par 5.

   (b) On a d'après la formule du binôme, on a

   $$\forall a \in \mathbb{R},\quad (a+1)^5 - 1 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1 - 1 = a\left[a^4 + 5(a^3 + 2a^2 + 2a + 1)\right]$$

   Donc quand on remplace a par u_n on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$:

   $$u_{n+1} = u_n[u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)]$$

   (c) Soit la propriété « $\mathscr{P}_n$: u_n est divisible par 5^{n+1} ».
   On sait déjà que $5^{0+1} = 5$ divise u_0. Donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   Montrons que la propriété est héréditaire : supposons qu'il existe un entier naturel k tel que u_k soit divisible par 5^{k+1} et montrons que 5^{k+2} divise u_{k+1}.
   On a $u_{k+1} = u_k[u_k^4 + 5(u_k^3 + 2u_k^2 + 2u_k + 1)]$.
   Or 5 divise u_k (HR) et 5 divise $5(u_k^3 + 2u_k^2 + 2u_k + 1)$ donc 5 divise $u_k^4 + 5(u_k^3 + 2u_k^2 + 2u_k + 1)$.
   De plus 5^{k+1} divise u_k (HR).
   Finalement 5^{k+2} divise $u_k\left[u_k^4 + 5(u_k^3 + 2u_k^2 + 2u_k + 1)\right] = u_{k+2}$.
   La propriété est héréditaire. Elle est vraie au rang 0. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) $u_1 = (u_0+1)^5 - 1 = (2009^2)^5 - 1 = 2009^{10} - 1$.
   $u_2 = (u_1+1)^5 - 1 = 2009^{50} - 1$ et $u_3 = (u_2+1)^5 - 1 = 2009^{250} - 1$.
   Or on sait d'après la question précédente que $5^{3+1} = 625$ divise u_3.
   Donc on a $2\,009^{250} - 1 \equiv 0\,[625] \iff 2\,009^{250} \equiv 1\,[625]$

   (b) $8001 = 32 \times 250 + 1$. Donc $2009^{8001} = \left(2009^{250}\right)^3 2 \times 2009$. Et on a :
   $2\,009^{8001} \equiv 1^3 2 \times 2\,009\,[625] \iff 2009^{8001} \equiv 2009\,[625]$

Partie C :

1. On a montré que $2009^{8001} - 2009 \equiv 0\,[16]$ et $2009^{8001} - 2009 \equiv 0\,[625]$.
   Donc 16 divise $2009^{8001} - 2009$ et 625 divise $2009^{8001} - 2009$.
   Or $16 = 2^4$ et $625 = 5^4$ sont premiers entre eux.
   D'après le théorème de Gauss, on a donc que $16 \times 625 = 10\,000$ divise $2009^{8001} - 2009$.

2. On vient de montrer que $2009^{8001} \equiv 2009\,[10\,000]$. Or $2009^{8001} = \left(2009^{2667}\right)^3$.
   Donc le nombre 2009^{2667} est un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

<u>Exercice</u> 2. (10 points)

1. On considère l'équation (E) : $109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
   (a) 109 est un nombre premier donc $PGCD(109, 226) = 1$.
   On sait alors d'après le théorème de Bezout qu'il existe une infinité de couples-solutions pour l'équation (E).
   (b) On a $109 \times 141 - 226 \times 68 = 1$ donc le couple $(141, 68)$ est une solution particulière de (E).
   On a alors
$$\begin{aligned}(E) \quad &\Longleftrightarrow \quad 109x - 226y = 109 \times 141 - 226 \times 68 \\ &\Longleftrightarrow \quad 109(x - 141) = 226(y - 68)\end{aligned}$$
   Ceci est possible si et seulement si 109 divise $226(y - 68)$.
   Or $PGCD(109, 226) = 1$, alors d'après le théorème de Gauss on a 109 divise $y - 68$.
   Ceci revient à dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - 68 = 109k \Longleftrightarrow y = 109k + 68$.
   En remplaçant y par cette expression dans la dernière équation, on obtient
$$109(x - 141) = 226(109k) \quad \Longleftrightarrow \quad x - 141 = 226k \quad \Longleftrightarrow \quad x = 226k + 141$$
   Donc l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme :
$$(141 + 226k; 68 + 109k), \text{ où } k \text{ appartient à } \mathbb{Z}.$$
   On cherche des entiers naturels d et e inférieurs à 226 tels que
$$109d = 1 + 226e \quad \Longleftrightarrow \quad 109d - 226e = 1$$
   Donc (d, e) est un couple solution de (E). Le seul répondant aux conditions d'encadrement est le couple $(141, 68)$.
2. $\sqrt{227} \simeq 15$ et 227 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11 et 13. Donc 227 est un nombre premier.
3. (a) On a $0^{109} = 0$ donc $f(0) = 0$ et $0^{141} = 0$ d'où $g(f(0)) = 0$.
   (b) On a
   – 227 est un nombre premier.
   – $a \in \{0; 1; 2; \dots; 226\}$ donc a n'est pas un multiple de 227.
   D'après le petit théorème de Fermat, on a alors $a^{226} \equiv 1\,[227]$.
   (c) On a $a^{109} \equiv f(a)\,[227]$ et $(f(a))^{141} \equiv g(f(a))\ [227]$.
   Donc $(a^{109})^{141} \equiv g(f(a))\ [227]$
   Or on sait que
$$\begin{aligned}&a^{226} \equiv 1\,[227] \\ \Longrightarrow \quad &a^{1+226e} \equiv 1^e \times a\,[227] \\ \Longleftrightarrow \quad &a^{109d} \equiv a\,[227] \\ \Longleftrightarrow \quad &\left(a^{109}\right)^{141} \equiv a\,[227]\end{aligned}$$
   Donc $g(f(a)) \equiv a\,[227]$.
   On a de même $a^{1+226e} = \left(a^{141}\right)^{109} \equiv f(g(a))\ [227]$.
   Donc $f(g(a)) \equiv a\,[227]$