Chapitre 3 : Similitudes

C. Aupérin

2009-2010

« La seule fin de la science est l'honneur de l'esprit humain et [...] à cet égard, une question concernant les nombres a autant de prix qu'une question relative au monde »

C. Jacobi à A.-M. Legendre (lettre du 2 juillet 1830)

Dernière modification : 11 janvier 2010

Table des matières

1 Un peu de théorie ... 1

1.1 Définitions 1

1.2 Rappels sur quelques transformations du plan 3

2 Les similitudes 5

3 Les similitudes directes 12

3.1 Définition 12

3.2 Détermination des similitudes directes 14

3.3 Cas particuliers : les déplacements 15

3.4 Existence et unicité 15

4 Retour au cas général 17

4.1 Détermination d'une similitude 17

4.2 Propriétés géométriques 18

Cours : Similitudes

1 Un peu de théorie ...

1.1 Définitions

Soit f une application du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même, qui à tout point M de $\mathscr{P}$ associe un unique point M' de $\mathscr{P}$. On note $f(M) = M'$.
Deux applications f et g de $\mathscr{P}$ dans lui-même sont égales si et seulement si pour tout point M de $\mathscr{P}$ on a $f(M) = g(M)$.

Définition 1 :

- On dit que f est **surjective**, si pour tout point M' de $\mathscr{P}$ il existe au moins un antécédent M dans $\mathscr{P}$ par f.
- On dit que f est **injective**, si pour tout point M' de $\mathscr{P}$ il existe au plus un antécédent M dans $\mathscr{P}$ par f.
- On dit que f est **bijective**, si pour tout point M' de $\mathscr{P}$ il existe un et un seul antécédent M dans $\mathscr{P}$ par f. Dans ce cas, on dit que f est une **transformation** du plan.

Exemples :

Illustrer ces définitions avec des patatoïdes

Remarques :

- Si f est injective, pour tous M_1 et M_2 de $\mathscr{P}$ tels que $f(M_1) = f(M_2)$ on a $M_1 = M_2$
- Une application f est une transformation du plan si et seulement si f est surjective et injective. Dans ce cas :
  - A tout point M du $\mathscr{P}$ il existe un unique point M' de $\mathscr{P}$ tel que $M' = f(M)$.
  - A tout point M' du $\mathscr{P}$ il existe un unique point M de $\mathscr{P}$ tel que $M' = f(M)$.

Propriété 1 :

Si f et g sont deux transformations de $\mathscr{P}$ alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des transformations de $\mathscr{P}$.

Preuve :

Démontrer que $f \circ g$ est surjective et injective de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$.

Propriété 2 :

Si f est une transformation de $\mathscr{P}$ alors il existe une transformation réciproque notée f^{-1} telle que :

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_{\mathscr{P}}$$

où $Id_{\mathscr{P}}$ est l'identité du plan qui à tout point M de $\mathscr{P}$ associe le point M lui-même, c'est-à-dire que pour tout point M de $\mathscr{P}$ on a $f \circ f^{-1}(M) = f^{-1} \circ f(M) = M$.

Preuve :

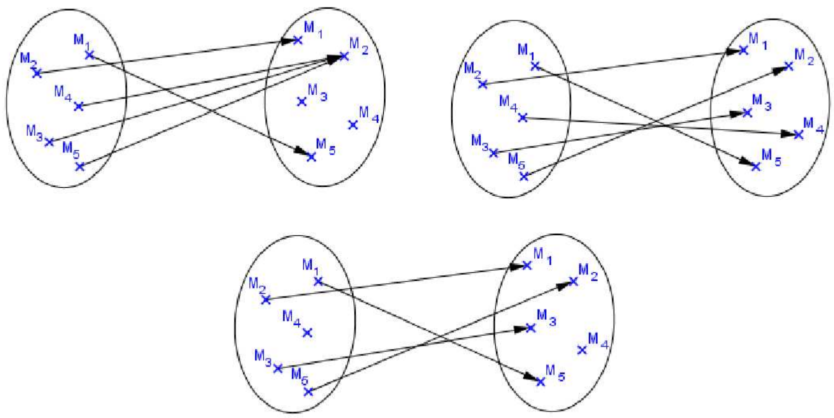
Trouver une application réciproque et démontrer qu'elle est bijective.

Remarque : Soient deux points M et N de $\mathscr{P}$. On a alors : $M = f^{-1}(N) \Longleftrightarrow N = f(M)$

Définition 2 :
Soit f est une transformation de $\mathscr{P}$. On dit qu'un point M de $\mathscr{P}$ est un point invariant de f si $f(M) = M$

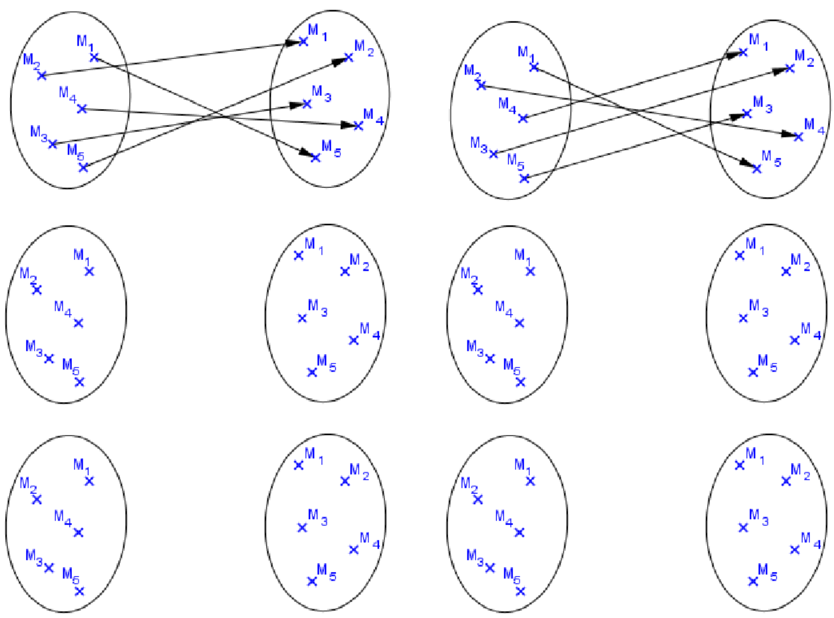
Exemple :
Tous les points de $\mathscr{P}$ sont invariants par $Id_{\mathscr{P}}$

Exercice 1 :
Pour chacun des schémas, dire si l'application est une injection, une surjection ou une bijection (justifier).



Exercice 2 :
On note f la transformations du premier schéma et g celle du deuxième.

1. Vérifier que ce sont bien des transformations (Justifier)
2. Décrire les transformations réciproques de f et g
3. Faire le schéma de la transformation $h = f \circ g$ et $s = g \circ f$



<u>Exercice 3</u> :

Soit f, g et h trois transformations du plan.

1. Vérifier que $g \circ f$ est une transformation du plan et que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
2. A et B sont deux points distincts du plan. Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les cas suivants :
   (a) f est la symétrie d'axe (AB) et g la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
   (b) f et g sont les symétries centrales par rapport à A et B respectivement
3. (a) Vérifier que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
   Grâce à cette propriété, on peut noter $h \circ g \circ f$ au lieu de $h \circ (g \circ f)$ ou de $(h \circ g) \circ f$.

   (b) Démontrer que : $f \circ g = h \Longleftrightarrow g = f^{-1} \circ h$ et $f \circ g = h \Longleftrightarrow f = h \circ g^{-1}$

1.2 Rappels sur quelques transformations du plan

<u>Travail de l'élève</u> :

1. Activité 1 p 92 du Math'x : reconnaître une transformation
2. Justifier qu'une translation, une rotation, une symétrie axiale et une homothétie sont des transformations du plan et préciser, dans chaque cas, leur(s) point(s) invariant(s), la nature et les éléments caractéristiques de leur transformation réciproque.
3. Démontrer qu'une projection orthogonale sur une droite n'est pas une transformation du plan.
4. Soit f une transformation du plan, M et N deux points du plan, d'images respectives M' et N' par f. Justifier que si $M \neq N$ alors $M' \neq N'$
5. Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
   On considère l'application s du plan dans lui-même d'expression complexe : $z' = (2+3i)z + 2 - i$.
   C'est-à-dire que pour tout point M d'affixe z, l'affixe du point $M' = s(M)$ est z'.
   Démontrer que s est une transformation du plan et déterminer l'expression complexe de la transformation réciproque s^{-1}.

Rappels sur les transformations

	Translation	Symétrie axiale	Rotation	Homothétie
Elément(s) Caractéristique(s)				
Notation				
M' image de M signifie que				
Cas particuliers				
Point(s) fixe(s)				
Transformation réciproque				
Isométrie				
Conserve les angles orientés				

Remarque : Toutes ces transformations et leurs composées conservent l'alignement, les barycentres, les cercles, le contact, les angles géométriques, le parallélisme et l'orthogonalité.

2 Les similitudes

Travail de l'élève : Activité 3 p 93 du Math'x : $z' = az + b$
La transformation ainsi définie est un nouvel exemple de transformation qui conserve le rapport des distances.
Une telle transformation est appelée similitude. L'objet de ce chapitre est d'étudier ces transformations et de les utiliser dans la résolution de problèmes.

Définition 3 :
On appelle similitude du plan toute transformation f du plan conservant les rapports de distances, ie une transformation du plan pour laquelle :
Pour tous points M, N, P et Q ($M \neq N$ et $P \neq Q$) dont les images par f sont notées respectivement M', N', P' et Q' on a :

$$\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ}$$

Propriété 3 :
Soit f une transformation du plan. f est une similitude si et seulement si il existe un réel k strictement positif tel que f multiplie les distances par k, ie Pour tous points M et N dont les images par f sont notées respectivement M' et N' on a :

$$M'N' = kMN$$

On dit que k est le rapport de la similitude f.

***Preuve* :**
Soit f une similitude.
On considère deux points distincts P et Q du plan et soient P' et Q' leurs images respectives par f.
Posons $k = \dfrac{P'Q'}{PQ}$. On voit de suite que $k \geq 0$.
Comme f est une transformation, deux points distincts ont nécessairement deux images distinctes, donc $k \neq 0$.
Soient M et N deux points distincts. f {etant une similitude, f conserve les rapport des distances. On a donc :

$$\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ} \text{ donc } \frac{M'N'}{MN} = \frac{P'Q'}{PQ} = k$$

Donc $M'N' = k\,MN$. D'autre part, si M et N sont confondus, il est clair que $M'N' = k\,MN = 0$
Réciproquement : Soit f une transformation pour laquelle il existe un réel $k > 0$ tel que f multiplie les distances par k.
Alors soient les points M, N, P et Q ($M \neq N$ et $P \neq Q$) dont les images par f sont notées respectivement M', N', P' et Q' on a :
$M'N' = k\,MN$ et $P'Q' = k\,PQ$ donc $\dfrac{M'N'}{MN} = k = \dfrac{P'Q'}{PQ}$ et donc $\dfrac{M'N'}{P'Q'} = \dfrac{MN}{PQ}$

***Exemples* :**
Les isométries sont les similitudes de rapport 1.
Les homothéties de rapport k sont des similitudes de rapport $|k|$.

Exercice 4 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
Ω est un point du plan d'affixe ω. Pour tout point M du plan, on considère le point M_1 image de M par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
On appelle M' le milieu de $[MM_1]$. Soit f l'application qui à M fait correspondre le point M'.

1. Déterminer l'écriture complexe de f.
2. Démontrer que f est une similitude et donner son rapport.

Exercice 5 :

On considère une homothétie h de rapport k. Démontrer que h est une similitude. Quel est son rapport ?

Exercice 6 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. Soit f l'application ayant pour écriture complexe $z' = 1 - i\overline{z}$. f est-elle une similitude ?
2. Soit fg l'application ayant pour écriture complexe $z' = z + 2\overline{z}$. g est-elle une similitude ?

Propriété 4 :

Si f est une similitude de rapport k alors sa réciproque est une similitude de rapport $k^{-1} = \frac{1}{k}$.
Si f est une similitude de rapport k et f' est une similitude de rapport k' alors les composées $f \circ f'$ et $f' \circ f$ sont des similitudes de rapport kk'.

Preuve :

Soit f une similitude de rapport k et f^{-1} sa réciproque.
f^{-1} est la réciproque d'une transformation du plan, donc f^{-1} est une transformation du plan.
Soient M et N deux points distincts du plan. Notons $M' = f^{-1}(M)$ et $N' = f^{-1}(N)$.
Alors par définition de f^{-1} on sait que $f(M') = M$ et $f(N') = N$.
f étant une similitude de rapport k, on a $MN = kM'N'$ et donc $M'N' = \frac{1}{k}MN$.
La transformation f^{-1} multiplie les longueurs par $\frac{1}{k}$. C'est une similitude.

Soit f une similitude de rapport k et f' une smilitude de rapport k'.
$f \circ f'$ est la composée de deux transformations du plan, donc $f \circ f'$ est une transformation du plan.
Soient M et N deux points distincts du plan. Notons $M' = f'(M)$, $N' = f'(N)$, $M'' = f(M')$ et $N'' = f(N')$.
f' étant une similitude de rapport k' on a $M'N' = k'MN$.
f étant une similitude de rapport k on a $M''N'' = kM'N' = kk'MN$.
Or on a $f \circ f'(M) = M''$ et $f \circ f'(N) = N''$. Sachant que $M''N'' = kk'MN$ on en déduit que $f \circ f'$ est une similitude de rapport kk'.
La démonstration est la même pour $f' \circ f$.

Remarque : En général $f \circ f' \neq f' \circ f$.

Exemple :

Dans le plan complexe, soit f la similitude $z \mapsto 2iz + 1$ et g celle d'écriture $z \mapsto \overline{z} - i$.
On désigne par A le point d'affixe i. Alors $f \circ g(A) = 5$ et $g \circ f(A) = -1 - i$

Propriété 5 :
Une application du plan dans lui-même ayant pour écriture complexe $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ est une similitude de rapport $k = |a|$.
Réciproquement, toute similitude a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

***Preuve* :**

Implication : Soit f une application du plan dans lui-même ayant pour écriture complexe $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

Cas $z' = az + b$:
- Montrons que f est une transformation du plan.
  Pour tout point N d'affixe z' il existe un et un seul point M ayant pour image N. C'est le point d'affixe z avec $z = \dfrac{z' - b}{a}$.
  Donc f est une application bijective du plan. C'est une transformation.

- Montrons que f multiplie les distances.
  Considérons deux points distincts M_1 et M_2 d'affixe z_1 et z_2, leurs images M_1' et M_2' ont pour affixes respectives $z_1' = az_1 + b$ et $z_2' = az_2 + b$.
  Alors $z_1' - z_2' = a(z_1 - z_2)$ donc $|z_1' - z_2'| = |a|\,|z_1 - z_2|$, ie $M_1'M_2' = |a|M_1M_2$.

- Conclusion : Finalement, f est une transformation du plan multipliant les distances par $k = |a|$. Comme $a \in \mathbb{C}^*$, on a $k > 0$. Donc f est une similitude de rapport k.

Cas $z' = a\overline{z} + b$:
- Montrons que f est une transformation du plan.
  Pour tout point 248N d'affixe z' il existe un et un seul point M ayant pour image N. C'est le point d'affixe z avec $\overline{z} = \overline{\left(\dfrac{z' - b}{a}\right)} = \dfrac{\overline{z'} - \overline{b}}{\overline{a}}$
  Donc f est une application bijective du plan. C'est une transformation.

- Montrons que f multiplie les distances.
  Considérons deux points distincts M_1 et M_2 d'affixe z_1 et z_2, leurs images M_1' et M_2' ont pour affixes respectives $z_1' = a\overline{z_1} + b$ et $z_2' = a\overline{z_2} + b$.
  Alors $z_1' - z_2' = a(\overline{z_1} - \overline{z_2})$ donc $|z_1' - z_2'| = |a|\,|\overline{z_1} - \overline{z_2}| = |a|\,|z_1 - z_2|$, ie $M_1'M_2' = |a|M_1M_2$.

- Conclusion : Finalement, f est une transformation du plan multipliant les distances par $k = |a|$. Comme $a \in \mathbb{C}^*$, on a $k > 0$. Donc f est une similitude de rapport k.

Réciproquement : On commence par démontrer deux résultats intermédiaires.

Lemme 1 : Soient ABC un triangle rectangle en A et s une similitude de rapport k. On note $A' = s(A)$, $B' = s(B)$ et $C' = s(C)$.
Alors l'image du triangle ABC par s est un triangle rectangle en A'.

> **Preuve** : On a $A'B' = kAB$, $A'C' = kAC$ et $B'C' = kBC$.
> Donc $A'B'^2 + A'C'^2 = k^2AB^2 + k^2AC^2 = k^2(AB^2 + AC^2) = k^2BC^2 = B'C'^2$ et le triangle $A'B'C'$ est rectangle en A'.

Preuve (Suite) :

Lemme 2 : Soient ABC un triangle rectangle en A, s et s' deux similitudes telles que $s(A) = s'(A)$, $s(B) = s'(B)$ et $s(C) = s'(C)$. Alors $s = s'$.

Preuve : Notons A', B' et C' les images de A, B et C par s (et donc aussi par s').
- Soit k le rapport de similitude de s et k' celui de s'. Prouvons que $k = k'$.
  On sait que $A'B' = kAB$ et $A'B' = k'AB$ or $AB \neq 0$ donc $k \neq k'$.
- Prouvons que $s = s'$.
  Pour cela, il suffit maintenant de montrer que pour n'importe quel point M du plan on a $s(M) = s'(M)$. Prenons alors un point M du plan et notons $M_1 = s(M)$ et $M_2 = s'(M)$. Nous allons montrer que $M_1 = M_2$.
  - On a $A'M_1 = kAM$ et $A'M_2 = k'AM = kAM$. Donc $A'M_1 = A'M_2$.
    Si $M_1 \neq M_2$ alors A' est sur la médiatrice de $[M_1M_2]$.
  - De même on peut montrer que B' et C' le sont aussi.
  - Donc les points A', B' et C' sont alignés.
    Or $A'B'C'$ est rectangle en A' (d'après le lemme 1) : les points ne peuvent pas être alignés.
  - On a donc $M_1 = M_2$ et par conséquent $s = s'$.

Retour à la démonstration initiale : On se place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Considérons une similitude s de rapport k.

Soient I le point d'affixe 1 et J le point d'affixe i. Notons O', I' et J' les images respectives par s de O, I et J.

- Le triangle OIJ est rectangle en O. Donc, d'après le lemme 1, que $O'I'J'$ est rectangle en O'.

- De plus, $OI = OJ$ donc $O'I' = O'J'$.

- Finalement $O'I'J'$ est rectangle isocèle en O' autrement dit :
  J' est donc l'image de I' par une rotation de centre O' et d'angle $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$.
  Notons b l'affixe de O' et α celle de I'.

Cas $\theta = \dfrac{\pi}{2}$:
Soit S la similitude d'écriture complexe $z' = (\alpha - b)z + b$. Démontrons que $s = S$.

- Le point O a pour affixe 0, donc O a pour image par S le point d'affixe $z' = b$ et $S(O) = O'$

- Le point I a pour affixe 1, donc I a pour image par S le point d'affixe $z' = \alpha$ et $S(I) = I'$

- Le point J a pour affixe i, donc J a pour image par S le point d'affixe $z' = (\alpha - b)i + b$.
  On peut alors écrire $z' - b = e^{i\frac{\pi}{2}}(\alpha - b)$, donc $S(J)$ est l'image de I' par la rotation de centre O' et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On a donc $S(J) = J'$.

- Les trois points O, I et J ont donc les mêmes images par les similitudes s et S.

- D'après le lemme 2, on a $s = S$ d'où s a une écriture complexe de la forme $z' = az+b$ ou $z' = a\overline{z}+b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

Preuve (Suite) :

Cas $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$

Soit S la similitude d'écriture complexe $z' = (\alpha - b)\overline{z} + b$. Démontrons que $s = S$.

- Le point O a pour affixe 0, donc O a pour image par S le point d'affixe $z' = b$ et $S(O) = O'$
- Le point I a pour affixe 1, donc I a pour image par S le point d'affixe $z' = \alpha$ et $S(I) = I'$
- Le point J a pour affixe i, donc J a pour image par S le point d'affixe $z' = (\alpha - b)\overline{i} + b$.
  On peut écrire $z' - b = e^{-i\frac{\pi}{2}}(\alpha - b)$, donc $S(J)$ est l'image de I' par la rotation de centre O' et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. On a donc $S(J) = J'$.
- Les trois points O, I et J ont donc les mêmes images par les similitudes s et S.
- D'après le lemme 2, on a $s = S$ d'où s a une écriture complexe de la forme $z' = az+b$ ou $z' = a\overline{z}+b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

Propriété 6 :

Une similitude conserve les angles géométriques.
Une similitude transforme un triangle en un triangle semblable, ie que si A , B et C sont trois points distincts et A', B', C' leurs images respectives par une similitude :

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \quad ; \quad \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'} \quad \text{et} \quad \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$$

Preuve :

Soit f une similitude de rapport k et A, B et C trois points distincts du plan.
On note z_A, z_B et z_C leur affixe respective dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
On sait que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ $[2\pi]$

- Si f a pour écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, alors les images A', B' et C' des points A, B et C ont pour affixe respective :

  $$z'_A = az_A + b \quad ; \quad z'_B = az_B + b \quad ; \quad z'_C = az_C + b$$

  Donc $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = \arg\left(\dfrac{z'_C - z'_A}{z'_B - z'_A}\right) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
  Dans ce cas, f conserve les angles orientés et par conséquent les angles géométriques.
- Si f a pour écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, alors les images A', B' et C' des points A, B et C ont pour affixe respective :

  $$z'_A = a\overline{z_A} + b \quad ; \quad z'_B = a\overline{z_B} + b \quad ; \quad z'_C = a\overline{z_C} + b$$

  Donc $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = \arg\left(\dfrac{\overline{z_C} - \overline{z_A}}{\overline{z_B} - \overline{z_A}}\right) = \arg\overline{\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)} = -\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
  Dans ce cas, f transforme un angle orienté en son opposé et par conséquent f conserve les angles géométriques.

Preuve (Suite) **:**

Soit un triangle ABC et soient A', B' et C' les images des points A, B et C par une similitude f.
Puisque ABC est un triangle, les points A', B' etC' sont deux à deux distincts et $A'B'C$ est un triangle.
Comme les angles de ce dernier sont les même que ceux du triangle ABC, les deux triangles sont semblables.

Remarque : Une transformation qui envoie tout triangle sur un triangle semblable, ou qui conserve les angles, est une similitude.

Exercice 7 **:**

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
Les points A, B, I, J et K d'affixes respectives $z_A = 4i$, $z_B = 2$, $z_I = 3$, $z_J = 1$ et $z_K = 3 - i$.

1. Démontrer que le triangle IJK est un triangle semblable au triangle OAB.
2. Existe-t-il une transformation d'écriture complexe $z' = az + b$ par laquelle le triangle OAB a pour image le triangle IJK ?
3. Existe-t-il une transformation d'écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$ par laquelle le triangle OAB a pour image le triangle IJK ?
4. On considère la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, l'homothétie h de centre B et de rapport $-\dfrac{1}{2}$ et la symétrie s d'axe $(O; \vec{u})$.
   Construire les images de O, A et B par l'application $s \circ h \circ r$. Donner l'écriture complexe de cette transformation.

Propriété 7 :

Soient A, B et C trois points non alignés.
- Si f est une similitude telle que $f(A) = A$ et $f(B) = B$ alors f est l'application Identité ou f est la symétrie d'axe (AB)
- Si f est une similitude telle que $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$ alors f est l'application Identité du plan. Autrement dit :
  Une similitude qui admet trois points fixes non alignés est l'Identité.

Preuve **:**

On choisit un repère orthonormal direct d'origine A et dont l'axe des abscisses est porté par la droite (AB).
Alors $z_A = 0$ et $z_B \neq 0$.
- Si l'écriture de f est du type $z' = az + b$ alors $f(A) = A \iff z_A = az_A + b \iff b = 0$.
  De plus, $f(B) = B \iff z_B = az_B \iff a = 1$.
  Ainsi $z' = z$ et f est l'identité.
- Si l'écriture de f est du type $z' = a\overline{z} + b$ alors on obtient $z' = \overline{z}$, et f est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
  D'où f est la symétrie d'axe (AB).
- Si f admet un troisième point fixe $C \notin (AB)$ alors f ne peut pas être la symétrie d'axe (AB). On est forcément dans le premier cas.

Remarque : Si une similitude a exactement un point invariant, elle peut être une homothétie ou une rotation, de centre ce point, mais pas nécessairement.

Exemple :
Dans le plan complexe, soit f la transformation d'écriture complexe : $z' = 2i\overline{z} - 3$

1. Vérifier que f est une simlitude.
2. Démontrer que f a un unique point invariant I
3. Expliquer pourquoi f n'est ni une homothétie, ni une rotation.
4. Trouver les éléments caractéristiques de cette similitude.

Exercice 8 **:**
On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
On note D la droite d'équation $y = x$. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, s la symétrie d'axe $(O;\vec{u})$ et s' la symétrie d'axe D.
Soit A le point d'affixe 1. Démontrer que les points O et A sont invariants par $s' \circ r$.
En déduire que $s' \circ s = r$.

3 Les similitudes directes

3.1 Définition

Définition 4 :
Une similitude directe est une similitude qui conserve les angles orientés.

Exemples :
L'identité, les translations, rotations et homothéties, ainsi que leurs composées conservent les angles orientés. Ce sont des similitudes directes.
Par contre, une symétrie axiale est une similitude qui ne conserve pas les angles orientés : elle les transforme tous en leur opposé. On dit que c'est une similitude *indirecte*.

Théorème 1 :
Dans le plan complexe, toute application qui a pour écriture complexe $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ est une similitude plane directe.

Exemples :

- $z' = z + 2i$ est une écriture complexe de la translation de vecteurs $2\vec{i}$
- $z' = iz = e^{i\frac{\pi}{2}}z$ est une écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$
- $z' = -2z + i \Longleftrightarrow z' - \frac{1}{3}i = -2\left(z - \frac{1}{3}i\right)$ est l'écriture complexe d'une homothétie de rapport -2 et de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{1}{3}$

***Preuve* :**

Une similitude f a deux écritures complexes possibles : $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$.
Notons M', N', P' les images par f de trois points distincts deux à deux M, N et P.

– ($\Longrightarrow$) Raisonnons par l'absurde.
  Si $z' = a\overline{z} + b$ alors $\dfrac{z_{P'} - z_{M'}}{z_{N'} - z_{M'}} = \dfrac{a\overline{z_P} + b - a\overline{z_M} - b}{a\overline{z_N} + b - a\overline{z_M} - b} = \dfrac{\overline{z_P} - \overline{z_M}}{\overline{z_N} - \overline{z_M}} = \overline{\left(\dfrac{z_P - z_M}{z_N - z_M}\right)}$, car $a \neq 0$
  Dans ce cas $(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}) = -(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$ et les angles orientés ne sont pas conservés.
  Par contraposée l'écriture complexe d'une similitude directe est forcément du type $z' = az + b$.
– ($\Longleftarrow$) Montrons que toutes les applications du plan d'écriture complexe $z' = az + b$ sont des similitudes directes.
  On sait déjà qu'une telle application est une similitude. Montrons qu'elle conserve les angles orientés.
  Comme ci-dessus on montre que $\dfrac{z_{P'} - z_{M'}}{z_{N'} - z_{M'}} = \dfrac{z_P - z_M}{z_N - z_M}$.
  Donc $(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$ et les angles orientés sont conservés.

Remarque : Une similitude qui transforme les angles orientés en leurs opposés s'appelle similitude indirecte (ou inverse).
D'après cette preuve, on voit
- que toute similitude du plan est soit directe, soit indirecte.
- que toute application qui a pour écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ est une similitude indirecte du plan.

Propriété 8 :
Soit f une similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
Il existe un réel θ tel que pour tous points M et N distincts du plan on a :

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{f(M)f(N)}) = \theta\,[2\pi]$$

On dit que θ est l'angle de la similitude directe f et on a $\theta = \arg(a)\,[2\pi]$

***Preuve* :**

Soit f une similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
Soient M et N deux points distincts du plan d'affixe respective z_1 et z_2.
On a alors $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{f(M)f(N)}) = \arg\left(\dfrac{az_2 + b - az_1 - b}{az_2 + b - az_1 - b}\right) = \arg(a)$

Remarque : Les translations et les homothéties de rapport positif ont pour angle 0.
Les homothéties de rapport négatif ont pour angle π.
Une rotation d'angle θ a pour angle θ.

Propriété 9 :
La composéee de deux similitudes directes d'angle θ et θ' est une similitude directe d'angle $\theta + \theta'$.
La bijection réciproque d'une similitude directe d'angle θ est une similitude directe d'angle $-\theta$.

***Preuve* :**
Soient f et g deux similitudes directes d'écriture complexe respectives du type $z' = az + b$ et $z' = a'z + b'$ avec $a, a' \in \mathbb{C}$ et $b, b' \in \mathbb{C}$.
On sait déjà $f \circ g$ et f^{-1} sont des similitudes.
Soit M un point du plan d'affixe z. Alors $f \circ g(M) = f(a'z + b') = a(a'z + b') + b = aa'z + ab' + b$.
C'est bien l'écriture complexe d'une similitude directe de rapport $|aa'|$ et d'angle $\arg(aa') = \arg(a) + \arg(a')$
De plus comme on peut écrire $z = \dfrac{1}{a}z' - \dfrac{b}{a}$, l'écriture complexe de f^{-1} est du type $z' = \dfrac{1}{a}z - \dfrac{b}{a}$.
Et f^{-1} est bien une similitude directe de rapport $\dfrac{1}{|a|}$ et d'angle $\arg\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\arg(a)$.

Remarques :
- Géométriquement, cela est immédiat.
- La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte. La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.

3.2 Détermination des similitudes directes

Théorème 2 :
Soit f une similitude de rapport $k \in \mathbb{R}^{+*}$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Alors
- Soit f est une translation ($k = 1$ et $\theta = 0$, pas de point fixe)
- Soit f admet un unique point fixe Ω, appelé centre de la similitude directe f.
  Dans ce cas f est la composée de l'homothétie h de centre Ω et de rapport k et de la rotation r de centre Ω et d'angle θ. De plus, $h \circ r = r \circ h$.
  L'écriture complexe de f dans un repère orthonormal direct du plan est alors :
  $$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega) \text{ où } \omega \text{ est l'affixe du point } \Omega$$

***Preuve* :**
Notons $z' = az + b$ ($a \neq 0$) la forme complexe de la similitude directe f.
- Si $a = 1$ alors $z' = z + b$ et f est une translation.
- Sinon $a \neq 1$, montrons que l'équation $z = z'$ admet une unique solution ω.
  $$z = z' \iff z = az + b \iff (1 - a)z = b \iff z = \frac{b}{1 - a} \qquad (a \neq 1)$$
  Donc f admet un unique point fixe Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1 - a}$.
  De plus on sait que $a = ke^{i\theta}$. Ainsi $z' - \omega = az + b - \omega = az + (1 - a)\omega - \omega = a(z - \omega) = ke^{i\theta}(z - \omega)$.
  On a h et r d'écriture complexe respective $z' - \omega = k(z - \omega)$ et $z' - \omega = k(z - \omega)$.
  Alors
  $$h \circ r(z) = k\left(e^{i\theta}(z - \omega) + \omega - \omega\right) = ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$
  On retrouve l'écriture complexe de f. On vérifie de même que $f = r \circ h$

Corollaire 1 :
Toute similitude directe f qui n'est pas une translation s'écrit sous la forme réduite $f = h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \theta)$.
On dit que f est une similitude directe de centre Ω, de rapport $k \in \mathbb{R}^{+*}$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$.

Exemples :
Si $k = 1$, alors f est une rotation.
Si $\theta = 0\,[2\pi]$ alors f est une homothétie de rapport k.
Si $\theta = \pi\,[2\pi]$ alors f est une homothétie de rapport $-k$.

Exercices du livre :
1 + 2 + 3 p 115 (résolus) + 4 p 119 + 8 + 9 + 11 + 13 p 120

3.3 Cas particuliers : les déplacements

Définition 5 :
Un déplacement est une similitude directe de rapport 1, ie une isométrie qui conserve les angles orientés.

Propriété 10 :
Tout déplacement est une translation ou une rotation

Preuve :
Découle de ce qui précède.

Corollaire 2 :
Tout déplacement d admet une écriture complexe $z \mapsto az + b$ avec $|a| = 1$.
– Si $a = 1$, d est la translation de vecteur d'affixe b
– Si $a \neq 1$, d est une rotation d'angle $\arg(a)$

Exemple :
Composition de déplacements.
Soit t la translation d'écriture complexe $z \mapsto z + 1$.
Soit r la rotation d'écriture complexe $z \mapsto -jz$ avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$)
$r \circ t : z \mapsto -j(z+1) = -jz - j$.
$z = -jz - j \Longleftrightarrow z = \frac{-j}{1+j} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
Donc $r \circ t$ est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de cente d'affixe $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. De même on peut montrer que $t \circ r$ est une rotation.

3.4 Existence et unicité

Propriété 11 :
Soient A, B, A' et B' quatre points tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.
Il existe une unique similitude directe f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$

***Preuve* :**
Notons z_A, z_B, $z_{A'}$ et $z_{B'}$ les affixes des points considérés dans le plan complexe.
Prouver l'existence et l'unicité d'une similitude directe f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$ reveint à démontrer l'existence et l'unicité de deux complexes a et b ($a \neq 0$) tels que

$$\begin{cases} az_A + b = z_{A'} \\ az_B + b = z_{B'} \end{cases}$$

Le déterminant de ce système linéaire 2×2 est $z_A - z_B \neq 0$ (car $A \neq B$). Donc il existe un unique couple (a, b) solution de ce système, soit une unique similitude f possible d'écriture complexe $z' = az + b$.

Remarque : Si l'on résout le système précédent, on trouve qu'une écriture complexe de f est

$$z' - z_{A'} = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}(z - z_A)$$

Cas particulier : Etant données trois points O, A et B, il existe une et une seule similitude directe de centre O transformant A en B.

Corollaire 3 :
Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles directement semblables avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$. Alors il existe une unique similitude directe f telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

***Preuve* :**
Le point C est tel que $\dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{A'B'}{AB} \Longleftrightarrow \dfrac{A'C'}{A'B'} = \dfrac{AC}{AB}$.
De plus $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$. Donc :

$$\frac{z_{C'} - z_{A'}}{z_{B'} - z_{A'}} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

où z_A, z_B, z_C, $z_{A'}$, $z_{B'}$ et $z_{C'}$ sont les affixes respectives de A, B, C, A', B' et C'.
Il en résulte $z_{C'} - z_{A'} = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}(z_C - z_A)$. Donc C' est l'image de C par la similitude qui tranforme A en A' et B en B' d'après ce qui précède.

***Exercices du livre* :**
5 + 12 p 119

4 Retour au cas général

4.1 Détermination d'une similitude

Théorème 3 :
Toute similitude du plan est
- Soit une similitude directe
- Soit la composée $g \circ s$ d'une similitude directe g et d'une symétrie axiale s que l'on peut choisir arbitrairement.

Preuve **:**
Soit f une similitude indirecte, A et B deux points distincts et A', B' leurs images par f.
Il existe une unique similitude directe g telle que $A' = g(A)$ et $B' = g(B)$.
On note g^{-1} la similitude directe réciproque de g. Alors $g^{-1} \circ f$ est une similitude indirecte et telle que

$$g^{-1} \circ f(A) = g^{-1}(A') = A \qquad \text{et} \qquad g^{-1} \circ f(B) = g^{-1}(B') = B$$

Donc $g^{-1} \circ f$ admet deux points fixes sans être l'identité du plan : c'est la symétrie s d'axe (AB).
Par conséquant $g^{-1} \circ f = s \iff f = g \circ s$

Propriété 12 :
Soit θ un réel. La similitude d'écriture complexe $z' = e^{i\theta}\overline{z}$ est une symétrie axiale d'axe passant par l'origine du repère.

Preuve **:**
On appelle f une telle similitude. On sait que f est une similitude indirecte, ce n'est donc pas l'identité du plan.
De plus, l'origine O du repère est un point fixe pour f, ainsi que le point A d'affixe $e^{i\frac{\theta}{2}}$.
f possède deux points fixes et n'est pas l'identité, c'est la symétrie d'axe (OA).

Exercices du livre :
14 + 16 + 18 p 120

4.2 Propriétés géométriques

Propriété 13 :

Toute similitude f conserve :
- L'orthogonalité
- Le parallélisme
- Les barycentres
- Transforme une droite en une droite
- Transforme un segment en un segment
- Transforme un cercle de centre O et de rayon R en un cercle de centre $f(O)$ et de rayon kR où k est le rapport de f

***Preuve* :**

Si f est une similitude directe, c'est une translation ou la composée d'une homothétie et d'une rotation.
Si f est une similitude indirecte, c'est la composée d'une similitude directe et d'une symétrie axiale.

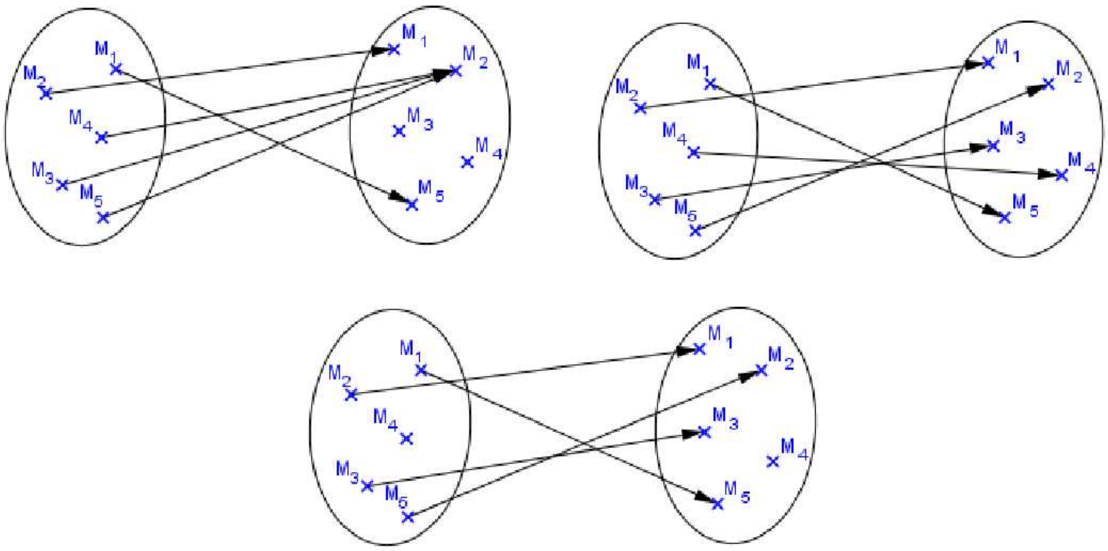
***Exercices du livre* :**

Type BAC : 20 et après p 122 + 47 + 53 p 128

Les Annexes

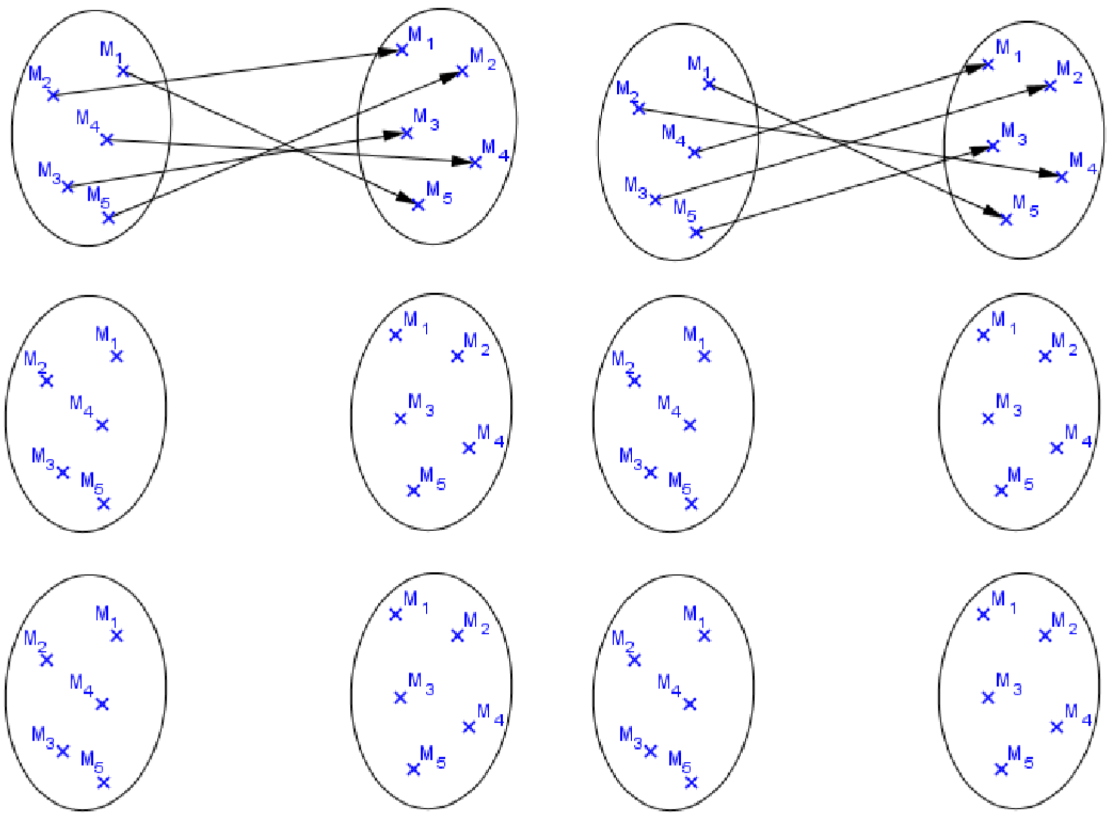
Exercices

Exercice 1. Pour chacun des schémas, dire si l'application est une injection, une surjection ou une bijection (justifier).



Exercice 2. On note f la transformations du premier schéma et g celle du deuxième.

1. Vérifier que ce sont bien des transformations (Justifier)
2. Décrire les transformations réciproques de f et g
3. Faire le schéma de la transformation $h = f \circ g$ et $s = g \circ f$



Exercice 3. Soit f, g et h trois transformations du plan.

1. Vérifier que $g \circ f$ est une transformation du plan et que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
2. A et B sont deux points distincts du plan. Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les cas suivants :
   (a) f est la symétrie d'axe (AB) et g la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
   (b) f et g sont les symétries centrales par rapport à A et B respectivement
3. (a) Vérifier que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
   Grâce à cette propriété, on peut noter $h \circ g \circ f$ au lieu de $h \circ (g \circ f)$ ou de $(h \circ g) \circ f$.

   (b) Démontrer que : $f \circ g = h \Longleftrightarrow g = f^{-1} \circ h$ et $f \circ g = h \Longleftrightarrow f = h \circ g^{-1}$

Exercice 4. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
Ω est un point du plan d'affixe ω. Pour tout point M du plan, on considère le point M_1 image de M par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
On appelle M' le milieu de $[MM_1]$. Soit f l'application qui à M fait correspondre le point M'.

1. Déterminer l'écriture complexe de f.
2. Démontrer que f est une similitude et donner son rapport.

Exercice 5. On considère une homoth{etie h de rapport k. Démontrer que h est une similitude. Quel est son rapport ?

Exercice 6. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. Soit f l'application ayant pour écriture complexe $z' = 1 - i\overline{z}$. f est-elle une similitude ?
2. Soit fg l'application ayant pour écriture complexe $z' = z + 2\overline{z}$. g est-elle une similitude ?

Exercice 7. On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
Les points A, B, I, J et K d'affixes respectives $z_A = 4i$, $z_B = 2$, $z_I = 3$, $z_J = 1$ et $z_K = 3 - i$.

1. Démontrer que le triangle IJK est un triangle semblable au triangle OAB.
2. Existe-t-il une transformation d'écriture complexe $z' = az + b$ par laquelle le triangle OAB a pour image le triangle IJK ?
3. Existe-t-il une transformation d'écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$ par laquelle le triangle OAB a pour image le triangle IJK ?
4. On considère la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, l'homothétie h de centre B et de rapport $-\dfrac{1}{2}$ et la symétrie s d'axe $(O; \vec{u})$.
   Construire les images de O, A et B par l'application $s \circ h \circ r$. Donner l'écriture complexe de cette transformation.

Exercice 8. On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
On note D la droite d'équation $y = x$. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, s la symétrie d'axe $(O; \vec{u})$ et s' la symétrie d'axe D.
Soit A le point d'affixe 1. Démontrer que les points O et A sont invariants par $s' \circ r$.
En déduire que $s' \circ s = r$.

Rappels sur les transformations

	Translation	Symétrie axiale	Rotation	Homothétie
Elément(s) Caractéristique(s)				
Notation				
M' **image de** M **signifie que**				
Cas particuliers				
Point(s) fixe(s)				
Transformation réciproque				
Isométrie				
Conserve les angles orientés				

Remarque : Toutes ces transformations et leurs composées conservent l'alignement, les barycentres, les cercles, le contact, les angles géométriques, le parallélisme et l'orthogonalité.