Exercice de spécialité : *Les questions sont indépendantes.*

1. Pour quelles valeurs de l'entier relatif m la fraction $\dfrac{2m-5}{m+8}$ est-elle elle-même un entier ?
2. k étant un entier relatif, on pose : $x = 2k - 1$ et $y = 9k + 4$.
   Montrer que tout diviseur commun à x et à y divise 17.
3. Déterminer les entiers naturels u et v vérifiant la relation : $u^2 - 4v^2 = 12$
4. n est un entier naturel. Démontrer que quel que soit n, $3n^2 + 5n + 1$ est impair .
   En déduire que ce nombre n'est jamais divisible par $n(n+1)$.

Correction Exercice de spécialité :

1. $\dfrac{2m-5}{m+8} = \dfrac{2m+16-21}{m+8} = 2 - \dfrac{21}{m+8}$.

   Donc $m+8$ doit diviser 21. Les diviseurs de 21 sont 1, 3, 7, et 21 et leurs opposés.
   Les valeurs de m possibles sont alors :
   $m = -7$, $m = -5$, $m = -1$, $m = 13$ et $m = -9$, $m = -11$, $m = -15$ et $m = -29$

2. Soit d un diviseur commun à x et y. Alors d divise toute combinaison linéaire de x et y.
   En particulier, d divise $-9x + 2y = -18k + 9 + 18k + 8 = 17$ donc d divise 17.

3. Les diviseurs naturels de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12.
   Or $u^2 - 4v^2 = (u-2v)(u+2v)$ et u et v étant naturels on a $u - 2v \leq u + 2v$

   Donc on doit avoir $\begin{cases} u-2v=1 \\ u+2v=12 \end{cases}$ ou $\begin{cases} u-2v=2 \\ u+2v=6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} u-2v=3 \\ u+2v=4 \end{cases}$

   Le seul système ayant des solutions naturelles est le deuxième. On trouve $u = 4$ et $v = 1$.

4. – Si n est pair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$ et
     $3n^2 + 5n + 1 = 3 \times 4p^2 + 10p + 1 = 2(6p^2 + 5p) + 1$.
     Le nombre considéré est donc impair.

   – Si n est impair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$ et
     $3n^2 + 5n + 1 = 3(4p^2 + 4p + 1) + 10p + 5 + 1 = 12p^2 + 12p + 3 + 10p + 6 = 2(6p^2 + 11p + 4) + 1$.
     Le nombre considéré est donc impair.

   – Or $n(n+1)$ est toujours pair (car soit n l'est, soit $(n+1)$).
     Donc si $n(n+1)$ divise $3n^2 + 5n + 1$, alors 2 divise un nombre impair, ce qui est absurde.