Correction Devoir Maison 1

Exercice 1. n°61 p 28 : $u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

1. $u_0 = 3^1 + 2^2 = 7 = 7 \times 1$,
   $u_1 = 3^3 + 2^3 = 27 + 8 = 35 = 7 \times 5$,
   $u_2 = 3^5 + 2^4 = 243 + 16 = 259 = 7 \times 37$,
   $u_3 = 3^7 + 2^5 = 2187 + 32 = 2219 = 7 \times 317$,
   $u_4 = 3^9 + 2^6 = 19683 + 64 = 19747 = 7 \times 2821$,
   $u_5 = 3^{11} + 2^7 = 177147 + 128 = 177275 = 7 \times 25325$,

2. $$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2} \\ &= 3^{2n+3} + 2^{n+3} \\ &= 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+1} \\ &= 7 \times 3^{2n+1} + 2 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+1} \\ &= 7 \times 3^{2n+1} + 2u_n \end{aligned}$$

3. – **Initialisation** : on a déj'a montrer que u_0 est divisible par 7.

   – **Hérédité** : Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que u_k est divisble par 7, montrons que u_{k+1} est divisible par 7.
   u_k est divisble par 7 donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = 7p$.
   Or $u_{k+1} = 7 \times 3^{2k+1} + 2u_k = 7 \times 3^{2k+1} + 2 \times 7p = 7(3^{2k+1} + 2p)$.
   Et $3^{2k+1} + 2p \in \mathbb{N}$. Donc u_{k+1} est divisible par 7.

   – La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. Donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2. n°75 p 29 :

1. Soit d un diviseur commun à x et y. Alors d divise toute combinaison linéaire de x et y. Par exemple, $x + y = A$ et $2x + 3y = B$. Donc d divise A et B.

2. $\begin{cases} A = x + y \\ B = 2x + 3y \end{cases} \iff \begin{cases} x = A - y \\ B = 2(A - y) + 3y \end{cases} \iff \begin{cases} x = A - y \\ B = 2A + y \end{cases} \iff \begin{cases} y = B - 2A \\ x = A - B + 2A \end{cases}$
   $\iff \begin{cases} y = B - 2A \\ x = 3A - B \end{cases}$

   Et tout diviseur commun à A et B divise toute combinaison linéaire de A et B, par exemple, x et y.

3. On pose $x = 2^n$ et $y = 3^n$. Alors $2^n + 3^n = x + y = A$ et $2^{n+1} + 3^{n+1} = 2x + 3y = B$.
   Alors tout diviseur commun à A et B divise 2^n et 3^n. Mais 2^n et 3^n sont clairement premiers entre eux.
   Donc les diviseurs communs de A et B sont forcément 1 ou -1 et A et B sont premiers entre eux.

<u>Exercice</u> 3. n°78 p 29 :

1. Si le diviseur est 2, alors le reste est $3 > 2$ donc la division n'est pas euclidienne.
   Sinon, on doit avoir $2^n - 1 > 3 \Longleftrightarrow 2^n > 4 \Longleftrightarrow n > 2$.

2. Si le diviseur est n, alors on doit avoir $n > 4$ pour que la division soit euclidienne.
   Sinon, le diviseur est $n - 4$ et on doit avoir $n - 4 > 4 \Longleftrightarrow n > 8$.

3. Si le diviseur est 3, alors on a $3 > 1$ donc la division est euclidienne.
   Sinon, le diviseur est $3n^2 + 2n$ mais ceci vaut 0 quand $n = 0$, ce qui est interdit.

   Au final, on peut dire que seule la dernière est une division euclidienne pour tout $n \in \mathbb{N}$

<u>Exercice</u> 4. n°28 p 29 :

On a $\left\{ \begin{array}{l} m = bq + r \\ m + 5 = b(q+3) + r - 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} m = bq + r & \\ 5 = 3b - 1 & (L_2 - L_1) \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 2 \\ m = 2q + r \end{array} \right.$

Donc, on sait que $r = 0$ ou $r = 1$ car $0 \leq r < b$. Mais on a aussi $0 \leq r - 1 < b$. Donc $r = 1$.
Alors $m = 2q + 1$ et $m + 5 = 2q + 6$, mais ces égalités sont équivalentes et l'on a pas d'autres conditions sur m.
Finalement, il suffit que m soit impair.