Exercices : Suites

1 Définir une suite

Exercice 1. Pour chacune des suites suivantes, trouver la fonction f à valeurs réelles telle que, pour tout n, $u_n = f(n)$, puis calculer les termes de u_0 à u_5

1. $u_n = 2n + 5$
2. $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n + 2}$
3. $u_n = \sin\left[(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right]$
4. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$
5. $u_n = \cos\left(n\dfrac{\pi}{3}\right)$
6. $u_n = n^2 - \sqrt{n} + 1$

Exercice 2. Pour chacune des suites suivantes, trouver la fonction f à valeurs réelles telle que, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$ et calculer les termes de u_1 à u_5

1. $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1} \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n} \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

2 Sens de variation

Exercice 3. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{3n - 2}{n + 1}$
2. $u_n = \dfrac{2^3 n}{3^{2n}}$
3. $u_n = (n-5)^2$
4. $u_n = \dfrac{n^2 + 1}{2n}$, $n \geq 1$
5. $u_n = \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$
6. $u_n = (-1)^n + n$
7. $u_0 = 2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - n$
8. $u_n = -\dfrac{1}{3}n + 3$
9. $u_n = 5n + 1$
10. $u_n = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3 Limite d'une suite

Exercice 4. Etudier la limite éventuelle des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = \dfrac{5}{n^4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
2. $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
3. $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n^2} + 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
4. $u_n = \left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(3 + \dfrac{2}{n^2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
5. $u_n = \dfrac{\sin\left(n\dfrac{\pi}{3}\right)}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
6. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 5. La suite (u_n) est définie par

$$u_n = \frac{3n}{n^3+1}$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \dfrac{3}{n^2}$
2. En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 6. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{3\sin n + 2\cos n + 5n}{n}$$

Exercice 7. On considère la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 2 \\ u_{n+2} & = & 6u_{n+1} - 5u_n \end{array} \right.$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4
2. Résoudre l'équation du second degré suivante : $x^2 = 6x - 5$
3. Déterminer deux réels A et B tels que : $u_n = A \times 5^n + B$
4. En déduire u_{10}

4 Suites arithmétiques

Exercice 8. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = 5 - 2n$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2
2. Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
3. Que vaut u_{100} ? Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$

Exercice 9. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = (n+1)^2 - n^2$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. La suite est-elle arithmétique ? Si oui, préciser sa raison.
3. Que vaut u_{99} ? Calculer la somme $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 195 + 197 + 199$

Exercice 10. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 8$. On sait que $u_{100} = 650$. Que vaut u_0 ?

Exercice 11. Calculer la somme suivante : $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 998 + 999$

Exercice 12. La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.

1. Calculer la raison r et u_0.

2. Calculer la somme $S = \sum_{i=50}^{i=100} u_i$

Exercice 13. Lequel des deux nombres suivants est le plus grand ?

$$A = 2009(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2007 + 2008 + 2009 + 2010)$$
$$B = 2010(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2006 + 2007 + 2008 + 2009)$$

Exercice 14. On considère la suite (u_n) définie par la relation

$$u_n = 3n - 2$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est arithmétique de raison r que l'on précisera. Préciser son sens de variation.
2. Représenter graphiquement la suite u_n). (On se limitera aux cinq ou six premiers termes)

5 Suites géométriques

Exercice 15. On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = -2$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4
2. Calculer u_{20}
3. Calculer la somme $S = \sum_{i=1}^{i=20} u_i$

Exercice 16. Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail.[1]

1^{er} contrat :

Un loyer de 200 € pour le premier mois puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail.

$2^{ème}$ contrat :

Un loyer de 200 € pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois juqu'à la fin du bail.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois (i.e du $36^{ème}$ mois).
3. Quel est le contrat globablement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ?

Exercice 17. Déterminer un nombre x tel que les trois nombres :

$$25 \qquad x \qquad 16$$

soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison négative.

Exercice 18. Calculer la valeur exacte de la somme :

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \cdots + 4096$$

Exercice 19. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \cdots + 59049 \quad \text{et} \quad S_2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 999$$

Exercice 20. On considère la suite définie par : $u_n = 2^n - n$.
Calculer u_0, u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

1. Un bail est un contrat de location

6 Appronfondissement

Exercice 21. Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14, qui est un élément radioactif. Durant leur vie, les tissus des animaux et végétaux contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère. Cette proportion de carbonne 14 décroit après la mort du tissu de $1,24\%$ par siècle.

1. Déterminer les pourcentages de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de 1000 ans, 2000 ans et 10000 ans.
2. Exprimer le pourcentage de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de $k \times 10^3$ années.
3. Un fossile ne contient plus que 10% de ce qu'il devait contenir en carbonne 14. Donner une estimation de son âge.

Exercice 22. Les V.H.F (voleurs fortement hiérarchisés) avaient tous, dans leur bande, un grade différent. Comme ils avaient, une nuit, volé un lot d'appareils photographiques, leur chef déclara :
« Le moins gradé en prendra un. Celui du grade immédiatement supérieur, deux. Celui du troisième grade, trois. Et ainsi de suite. »
Mais les voleurs se révoltèrent contre cette injustice :
« Nous en prendrons cinq chacun, dit le plus audacieux ». Et ainsi fut fait.
Combien d'appareils les V.H.F avaient-ils volés ?

Exercice 23. Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 500€. Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 2% par rapport à l'année précédente.
On note (u_n) la suite des primes avec $u_1 = 500$

1. Calculer u_2, puis u_3 (i.e la prime versée par l'entreprise la $2^{ème}$ année et la $3^{ème}$ année)
2. Préciser la nature de la suite (u_n) ainsi que sa raison q.
   Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime.
3. Calculer la prime qu'il touchera à la $20^{ème}$ année (i.e u_{20})
4. Calculer la somme totale S des primes touchées sur les 20 années. (i.e $S = \sum\limits_{i=1}^{i=20} u_i$)

Exercice 24. On dispose d'un capital C_0 de 1500€.
Le 1^{er} janvier 2000, on place ce capital sur un compte à intérêts composés de 3% par an.

1. Calculer le capital C_1 obtenu au bout d'un an.
2. Calculer le capital C_7 obtenu au bout de 7 ans
3. De quel pourcentage a augmenté le capital pendant ces 7 années ?
4. Combien d'années faut-il laisser cet argent sur le compte afin d'avoir un capital d'au moins 2000€ ?

Exercice 25. On considère la somme $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1048576$.

1. Trouver, à l'aide de la calculatrice, l'entier n tel que $2^n = 1048576$
2. Combien y-a-t-il de termes dans la somme S ?
3. Calculer la somme S

Exercice 26. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n + 1} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Ni l'un ni l'autre ?

2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 < u_n \leq 3$$

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

   (a) Calculer v_0, v_1 et v_2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n
   (c) Exprimer u_n en fonction de v_n. Que vaut u_{10} ?

Exercice 27. On considère la suite géométrique définie de la façon suivante :

$$u_1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4
2. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer une valeur approchée de u_{64}.
3. **La légende du jeu d'échec** : *le roi demanda à l'inventeur du jeu d'échec de choisir lui-même sa récompense. Celui-ci répondit : « place 1 grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux grains sur la deuxième, quatre grains sur la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la 64ème case ». Le roi sourit de la modestie de cette demande.* Calculer une valeur approchée du nombre total de grains de blé que le roi devra placer sur l'échiquier.

Exercice 28.

1. ABC est un triangle rectangle. La longueur de son plus petit côté est 1 et les longueurs de ses côtés sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Déterminer ces longueurs.
2. ABC est un triangle rectangle. La longueur de son plus petit côté est 1 et les longueurs de ses côtés sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Déterminer ces longueurs.

Exercice 29. Calculer les sommes suivantes :

$$I_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) \qquad \text{somme des } n \text{ premiers entieers naturels impairs}$$

$$P_n = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n \qquad \text{somme des } n \text{ premiers entiers naturels pairs}$$

Exercice 30. Calculer la somme suivante :

$$S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \cdots + 2005^2 - 2006^2 + 2007^2 - 2008^2 + 2009^2 - 2010^2$$

[2]

Exercice 31. Résoudre l'équation :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^8} = 0$$

[3]

2. Indication : regrouper les termes par deux
3. Indication : calculer la somme puis remarquer que si x est solution alors $x < 0$