Exercices : Statistiques

Exercice 1. Sept sprinters effectuent deux 100 m. Leurs temps sont donnés dans le tableau suivant :

	Sprinteur A	Sprinteur B	Sprinteur C	Sprinteur D	Sprinteur E	Sprinteur F	Sprinteur G
Sprint 1	10"14	10"17	9"94	10"05	10"25	10"09	9"98
Sprint 2	10"41	9"97	9"96	10"12	10"19	10"19	10"12

Soit $(x_i)_{1\leq i\leq 7}$ les temps respectifs des sprinters A, B, ... , F au sprint 1 et $(y_i)_{1\leq i\leq 7}$ les temps respectifs des sprinters A, B, ... , F au sprint 2.

1. Calculer les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ des séries $(x_i)_{1\leq i\leq 7}$ et$(y_i)_{1\leq i\leq 7}$.
2. Calculer les écarts-types σ_x et σ_y des séries $(x_i)_{1\leq i\leq 7}$ et$(y_i)_{1\leq i\leq 7}$.
3. Lequel des deux sprints a été le plus homogène ?

Exercice 2. Le tableau suivant donne les effectifs des notes obtenues dans une classe en Maths et en Physique :

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maths	0	0	0	0	1	0	1	1	3	4	4	1	3	2	2	1	1	0	0	0	0
Physique	0	1	0	0	2	0	1	2	1	1	4	2	2	0	3	2	1	0	1	0	1

Le but de l'exercice est de comparer la dispersion des notes en Maths et en Physique.

1. Utilisation des quartiles
   (a) Calculer médiane m_e et quartiles Q_1 et Q_3 en Maths
   (b) Calculer médiane m'_e et quartiles Q'_1 et Q'_3 en Physique
   (c) Représenter les diagrammes en boîte des notes en Maths et en Physique. Interpréter.
2. Utilisation des écarts-types
   (a) Calculer la moyenne m des notes en Maths et la moyenne des notes m' en Physique. Interpréter.
   (b) Calculer l'écart-type σ des notes en Maths et l'écart-type σ' des notes en Physiques. Interpréter.

Exercice 3. Soit $(x_i, n_i)_{1\leq i\leq p}$ une série statistique de moyenne $\overline{x}$ et de variance V_x.
On note $N = \sum_{i=1}^{i=p} x_i$(effectif total) et, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$: $f_i = \dfrac{x_i}{n_i}$ (fréquence de x_i)
Soit g la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$g(t) = \sum_{i=1}^{i=p} f_i(x_i - t)^2$$

1. Calculer la dérivée de g.
2. En déduire les variations de g.
3. En déduire que la fonction g admet un minimum en $t = \overline{x}$. Que vaut ce minimum ?

Exercice 4. Quarante candidats passent un examen (noté de 0 à 20). Leur moyenne est de 9,5 et l'écart-type est égal à 2. On veut effectuer une péréquation affine afin d'obtenir une moyenne de 10 et un écart-type de 3. Notons $(x_i)_{1 \leq i \leq 40}$ les notes initiales et $(y_i)_{1 \leq i \leq 40}$ les notes obtenues après changement affine. On a donc :

$\overline{x} = 9; \sigma_x = 2$. On pose : $y_i = ax_i + b$ où a (avec $a > 0$) et b sont à déterminer afin d'avoir $\overline{y} = 10$ et $\sigma_y = 3$.

1. Exprimer $\overline{y}$ en fonction de a, b et $\overline{x}$.
2. Exprimer σ_y en fonction de a et σ_x.
3. En déduire les valeurs de a et b. Quelle est la nouvelle note d'un candidat ayant initialement $5,6$? (On arrondira à 10^{-1})
4. Quelle doit être les valeurs extrêmes des x_i afin que cette péréquation soit réalisable ? (On arrondira à 10^{-1})

Exercice 5. Une coopérative laitière fabrique un fromage qui doit contenir, selon les étiquettes, 50% de matière grasse. Un organisme dont le rôle est de contrôler la qualité des produits prélève 100 fromages afin d'analyser leur taux de matière grasse.
Les résultats de l'analyse sont les suivants :

Taux	$[42, 45[$	$[45; 47,5[$	$[47,5; 50[$	$[50; 52,5[$	$[52,5; 55[$
Effectif	12	24	36	24	4

1. Calculer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type σ de cette série.
2. Déterminer les quartiles et la médiane.
3. Une production de fromages peut-être vendue sous l'appellation « 50% de matière grasse »si les deux conditions suivantes sont remplies :
   – au moins 80% des fromages analysés sont dans l'intervalle $[\overline{x} - 2\sigma; \overline{x} + 2\sigma]$
   – 50 est dans l'intervalle $[\overline{x} - 2\sigma; \overline{x} + 2\sigma]$.
   Que pensez-vous de la production de la coopérative précédente ?

Définition 1 :

On appelle coefficient de variation d'une série le nombre $C_v = \dfrac{\sigma_x}{\overline{x}}$ où σ_x est son écart-type et $\overline{x}$ sa moyenne.

Remarque : Ce coefficient relativise la valeur de l'écart-type par rapport à la moyenne. Ainsi il permet de comparer entre elles des séries dont les valeurs ont des ordres de grandeur différents. En effet, si un caractère prend des valeurs très grandes par rapport à un autre, l'écart-type du premier sera certainement supérieur à celui du second, mais cela ne veut pas dire que la dispersion du premier caractère est plus grande que celle du second.

Exercice 6. Lors d'un relevé d'exploitation, voici les poids des animaux mis en vente par l'agriculteur :

	Moutons	Vaches
poids moyen (en kg)	$38,2$	$341,3$
écart-type (en kg)	$2,8$	$14,7$

Etudier la dispersion relative des poids pour ces deux catégories animales, en calculant les coefficient de variation. Commenter.