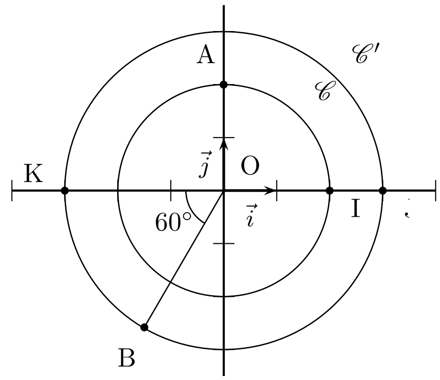
Exercices : Produit Scalaire

<u>Exercice</u> 1. Dans un repère orthonormal, les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(1;1)$, $(3;4)$ et $(3-k;-1)$ où k est un réel.

1. Déterminer le réel k afin que le triangle ABC soit rectangle en A.
2. Démontrer que le triangle ABC est alors isocèle en A.

<u>Exercice</u> 2. Sur la figure ci-contre on a tracé deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre O et de rayons respectifs 2 et 3.
Le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormal.
Calculer les produits scalaires suivants :



1. $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OJ}$
2. $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OK}$
3. $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OB}$
4. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$
5. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AI}$
6. $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IJ}$
7. $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BA}$

<u>Exercice</u> 3. Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$:

1. $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(-1;5)$
2. $\|\vec{u}\|=1$; $\|\vec{v}\|=2$; $(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{2\pi}{3}$ rad
3. $\|\vec{u}\|=2$; $\|\vec{v}\|=3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|=3$
4. $\|\vec{u}\|=1$; $\|\vec{v}\|=3$; $(\vec{u},\vec{v})=0$ rad
5. $\|\vec{u}\|=2$; $\|\vec{v}\|=3$; $(\vec{u},\vec{v})=\pi$ rad
6. Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormal : $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ et $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}$

<u>Exercice</u> 4. On prend le centimètre comme unité.
Construire un triangle ABC tel que :

1. $AB=3$, $AC=6$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9$
2. $AB=4$, $AC=5$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-12$
3. $AB=3$, $AC=4$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

<u>Exercice</u> 5. On considère un segment $[AB]$ et O son milieu. Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$ et $M\in\Delta$
Montrer que :

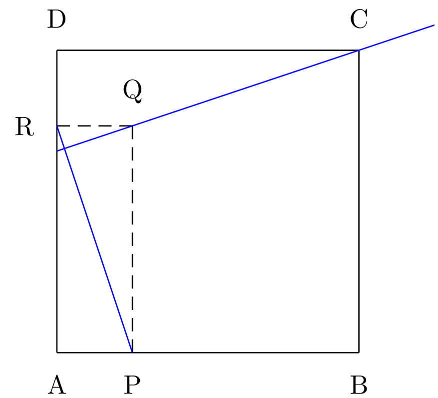
$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}AB^2$$

<u>Exercice</u> 6. ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de $[BC]$. Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CI}$
3. $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AI}$

Exercice 7. Soit $ABCD$ un carré, on construit un rectangle $APQR$ tel que :

- P et R sont sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$ du carré
- $AP = DR$



But : On souhaite montrer que les droites (PR) et (CQ) sont perpendiculaires

1. Montrer que : $\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{CQ}\cdot\left(\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}\right)$

2. En déduire que les droites (PR) et (CQ) sont perpendiculaires.

Exercice 8. ABC est un triangle dans lequel $AB = 2$ et $AC = 3$. De plus $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4$
ABC est-il rectangle ? Si oui, préciser le sommet.

Exercice 9. $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$. En déduire BD.

Exercice 10. $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon r et M un point non situé sur $\mathscr{C}$. Deux droites issues de M coupent $\mathscr{C}$ respectivement en A et B et en C et D
But : Montrer que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$
On note A' le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$

1. Faire deux figures suivant que M est à l'intérieur ou à l'extérieur de $\mathscr{C}$
2. Démontrer que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}$
3. (a) En utilisant la relation de Chasles, démontrer que :
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'} = MO^2 - r^2$$
   (b) En déduire que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$

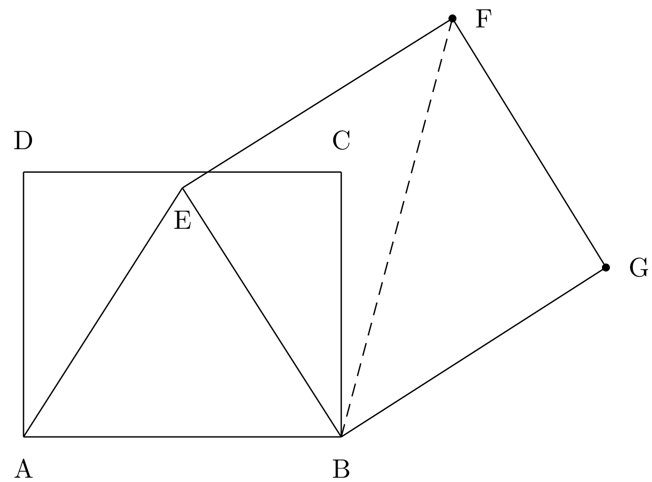
Note

On montre ainsi que le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ est indépendant de la sécante issue de M, il ne dépend que de la distance de M à O. Le réel $MO^2 - r^2$ (qui est nul lorsque M est un point de $\mathscr{C}$) est appelé puissance de M par rapport à $\mathscr{C}$. Il est positif lorsque M est à l'extérieur de $\mathscr{C}$ et négatif si M est à l'intérieur de $\mathscr{C}$

Exercice 11. On construit un triangle équilatéral AEB de côté 1 et deux carrés $ABCD$ et $BGFE$ comme sur la figure ci-dessous

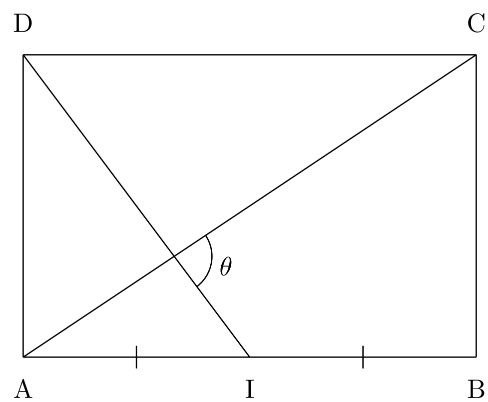
1. Calculer $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE}$, en déduire $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BE}$
2. Calculer $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$
3. (a) Démontrer que le triangle BCG est équilatéral.
   (b) En déduire $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BE}$
4. Calculer $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF}$
5. En utilisant la relation de Chasles, calculer $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BF}$

6. En déduire que les points D, E et G sont alignés.



Exercice 12. $ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 5$. I est le milieu de $[AB]$

1. Calculer AC et DI
2. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, puis calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DI}$
3. En déduire la valeur de l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{DI}; \overrightarrow{AC}\right)$ à 0,001 près en degrés.



Exercice 13. On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Examiner si les équations suivantes sont des équations de cercle et, le cas échéant, préciser le centre et le rayon du cercle :

1. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$
2. $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$

Exercice 14. On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère un triangle ABC avec$A(˘1; 2)$, $B(3; 1)$ et $C(2; 4)$.

1. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Exercice 15. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne un point $\Omega(2;-3)$.

1. Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon $R=5$.
2. Démontrer que le point $A(-2;0)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 16. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points suivants :

$$A(2;1) \qquad B(7;2) \qquad C(3;4)$$

Toutes les questions suivantes sont indépendantes et sans rapport :

1. Calculer les coordonnées du barycentre G de $\{(A,3);(B,2);(C,-4)\}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[BC]$.
3. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. L'angle $\widehat{A}$ est-il droit ?

Exercice 17. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère le point $A(3;5)$.
Chercher une équation de la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon OA.

Exercice 18. Soit ABC un triangle et K le projeté orthogonal de A sur (BC). On donne $AB=6$, $BK=4$ et $KC=7$

1. I est le milieu de $[BC]$ et G le centre de gravité du triangle ABC. Faire une figure.
2. Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{IB}$, ainsi que la somme :
$$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{AC}$$
3. Déterminer et représenter en rouge l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC}=44$
4. Déterminer et représenter en vert l'ensemble des points M du plan tels que : $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=0$

Exercice 19. $[AB]$ est un segment de milieu I et $AB=2$ cm.

1. Montrer que pour tout point M du plan : $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$
2. Trouver et représenter l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2-MB^2=14$

Exercice 20. On considère un segment $[AB]$ avec $AB=1$ dm. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

1. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=1$
2. $MA^2+MB^2=5$

Exercice 21. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère le cercle $\mathscr{C}$ passant par les points $A(4;2)$ et $B(2;6)$ et dont le centre Ω est situé sur la droite d d'équation $x+y+2=0$.

1. Faire une figure
2. Déterminer les coordonnées de Ω
3. Déterminer une équation de $\mathscr{C}$

Exercice 22. Le but de cet exercice est de démontrer, à l'aide du produit scalaire, que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
Soit ABC un triangle. On note A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A, B et C sur (BC), (AC) et (AB).
On note $H = (BB') \cap (CC')$

1. Que valent les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB}$
2. Calculer $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$
3. Conclure.

Exercice 23. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(-2; 2)$ et $B(2; 2)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu I de$[AB]$.
2. Démontrer que, pour tout point M du plan, on a :
$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$
3. Démontrer que l'ensemble E des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = 40$ est un cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon $r = 4$.
4. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$.
5. Déterminer les coordonnées des (éventuels) points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
6. Soit λ un réel négatif. Comment choisir λ pour que le point $Z(7; \lambda)$ soit sur $\mathscr{C}$?
7. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ en Z.

Exercice 24. Olympiades
Dans un triangle ABC, la hauteur, la bissectrice et la médiane relative au sommet A partagent l'angle $\widehat{BAC}$ en quatre angles de même mesure α en degré. Après avoir exprimé, en fonction de α, les mesures de tous les angles de la figure, en déduire les mesures des angles du triangle ABC