

Exercices : Probabilités

Exercice 1. On lance un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. La loi de probabilité est donnée par le tableau :

Eventualité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{12}$	a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

1. Déterminer a
2. Déterminer la probabilité de l'événement A : « obtenir un nombre pair »

Exercice 2. Dans un univers Ω , on donne deux événements A et B incompatibles tels que $P(A) = 0,2$ et $P(B) = 0,7$.

Calculer $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(\bar{A})$ et $P(\bar{B})$

Exercice 3. Un sac contient trois jetons, numérotés 1, 2 et 3.

On tire un jeton au hasard, puis on lance un dé autant de fois que le chiffre inscrit sur le jeton.

Calculer la probabilité que la somme du nombre lu sur le jeton et du (ou des) nombre(s) lu(s) sur le dé soit égale à 7.¹

Exercice 4. Un sac contient quatre jetons rouges, trois jetons verts et deux jetons bleus.

On tire des jetons, sans remise, jusqu'à obtention d'un jeton de même couleur qu'un des jetons précédemment tirés.

Calculer la probabilité que les deux jetons de même couleur soient bleus.

Exercice 5. On considère l'ensemble des entiers naturels de 1 à 20. On choisit au hasard l'un de ces nombres.

1. Quelle est la probabilité des événements suivants :

(a) A : « il est multiple de 2 »

(c) C : « il est multiple de 5 »

(b) B : « il est multiple de 4 »

(d) D : « il est multiple de 2 mais pas de 5 »

2. Calculer la probabilité de $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $A \cup C$

Exercice 6. On lance n dés ($n \geq 1$). On note A l'événement « obtenir au moins un 6 »

1. Décrire \bar{A}

2. Exprimer en fonction de n la probabilité $P(\bar{A})$

3. En déduire que $P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(A)$								

- Compléter le tableau suivant :
- Combien de dés faut-il lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\frac{3}{4}$?

Exercice 7. Une urne U contient trois boules blanches et urne V contient deux boules blanches et une boule noire. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans l'urne choisie. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

Exercice 8. On considère un jeu de 32 cartes.

Note : La composition d'un jeu de 32 cartes est la suivante : 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; valet ; dame ; roi ; as pour chacune des 4 « couleurs » : coeur ; carreau ; trèfle et pique.

On tire, au hasard, une carte du paquet. Chaque carte ayant autant de chance d'être choisie. On considère les événements suivants :

V : « Obtenir un valet »

F : « Obtenir une figure » (les figures sont les valets, dames et rois)

T : « Obtenir un trèfle »

- Calculer les probabilités suivantes :

(a) $P(V)$

(b) $P(F)$

(c) $P(T)$

- Décrire l'événement $F \cap T$ puis calculer sa probabilité. En déduire la probabilité $P(F \cup T)$.
- Décrire l'événement \bar{F} et calculer sa probabilité

Exercice 9. Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants.

On fait l'hypothèse qu'ils auront, à chaque fois, autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux. Calculer la probabilité des événements :

A : « ils auront trois filles »

B : « ils auront trois enfants de même sexe »

C : « ils auront au plus une fille »

D : « les trois enfants ne seront pas du même sexe »

Exercice 10. Une urne U_1 contient trois boules numérotées 1, 6 et 8. Une urne U_2 contient trois boules numérotées 2, 4 et 9. Une urne U_3 contient trois boules numérotées 3, 5 et 7.

Justine joue avec l'urne U_1 , Alice avec l'urne U_2 et Mathilde avec l'urne U_3 . Le jeu se joue à deux, chaque joueur prend une boule au hasard dans l'urne. Le gagnant est celui qui a le plus grand numéro.

- Justine joue contre Alice. Laquelle des deux a le plus de chance de gagner ? (Un tableau décrivant les couples de résultats possibles permettra de trouver le vainqueur)

1. On pourra s'aider d'un arbre

2. Alice joue contre Mathilde. Laquelle des deux a le plus de chance de gagner ?
3. Mathilde joue contre Justine. Laquelle des deux a le plus de chance de gagner ?²

Exercice 11. Problème du duc de Toscane

Le jeu de « passe-dix » consiste à jeter trois dés, on gagne si la somme des points obtenus dépasse 10. Le chevalier de Méré constatait qu'en pratique on gagnait plus souvent avec 11 qu'avec 12.

Cela contredisait son raisonnement, que voici :

« Il y a six possibilités de marquer 11 points :

$\{4, 4, 3\}$, $\{5, 3, 3\}$, $\{5, 4, 2\}$, $\{5, 5, 1\}$, $\{6, 3, 2\}$, $\{6, 4, 1\}$

et six possibilités de marquer 12 points :

$\{5, 4, 3\}$, $\{5, 5, 2\}$, $\{6, 3, 3\}$, $\{6, 4, 2\}$, $\{6, 5, 1\}$, $\{4, 4, 4\}$

Donc la probabilité de marquer 11 est égale à celle de marquer 12. »

1. Vérifier qu'en distinguant les dés, contrairement au chevalier de Méré, il y a six façons d'obtenir 5, 4 et 3
2. Vérifier qu'il y a 25 façons d'obtenir 12 et 27 d'obtenir 11
3. Prouver que la probabilité d'obtenir 12 est $\frac{25}{216}$ et celle d'obtenir 11 est $\frac{27}{216}$

Exercice 12. Une roue de loterie est partagée en douze secteurs égaux : six bleus, trois verts, deux jaunes et un rouge.

Lors d'une partie, on fait tourner rapidement la roue et un repère fixe désigne la couleur obtenue à l'arrêt.

1. Décrire, sous la forme d'un tableau, la loi de probabilité la mieux adaptée à cette expérience.
2. A chaque issue, on associe le gain algébrique en euros (positif ou négatif) du joueur suivant la règle : bleu : -1€ , vert : -4€ , jaune : 0€ et rouge : 12€ . Quelle est l'espérance de gain du joueur
3. Dans cette question on ne change que la somme attribuée à la couleur jaune, quelle valeur faut-il lui attribuer afin que le jeu soit équitable ?
4. Dans les deux cas, calculer l'écart type et interpréter votre résultat.

Exercice 13. Une boîte contient six boules rouges et n boules blanches. Un jeu consiste à tirer successivement, sans remise, deux boules de la boîte. Si les deux boules ont la même couleur, le joueur gagne 1€ ; si elles sont de couleurs différentes, le joueur perd 1€ .

1. Si $n = 3$. Calculer les probabilités d'obtenir deux boules :

(a) de même couleur

(b) de couleurs différentes

2. Si $n \geq 2$. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le gain algébrique du joueur.

(a) Exprimer en fonction de n les probabilités des événements $(X = 1)$ et $(X = -1)$

(b) Montrer que l'espérance mathématique $E(X)$ est telle que

$$E(X) = \frac{n^2 - 13n + 30}{(n + 6)(n + 5)}$$

2. Ce genre de situation, surprenante, est connu sous le nom de paradoxe de Condorcet. Ce sont des situations face auxquelles on ne peut pas ordonner de préférences.

- (c) Pour quelles valeurs de n le jeu est-il équitable ?
- (d) Pour quelles valeurs de n le jeu est-il défavorable ?

Exercice 14. Le problème du chevalier de Méré

Le chevalier de Méré, philosophe et homme de lettres pose le problème suivant au mathématicien Blaise Pascal. « Qu'est ce qui est le plus probable : obtenir au moins un six en quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double-six en lançant 24 fois deux dés ? »

1. On lance un dé quatre fois de suite.
 - (a) Quel est le nombre d'issues de l'expérience ?
 - (b) A est l'événement : « Obtenir au moins un six ». Définir l'événement \bar{A} et calculer sa probabilité. En déduire celle de A
2. On lance maintenant deux dés 24 fois de suite.
 - (a) Montrer que le nombre d'issues de l'expérience est 36^{24} .
 - (b) B est l'événement : « Obtenir un double-six ». Définir l'événement \bar{B} et calculer sa probabilité. En déduire celle de B
3. Répondre au chevalier de Méré.

Exercice 15. On lance un dé équilibré. Si la face 6 apparaît, le gain du joueur est de 100€, si la face 1 apparaît, le gain est de 50€, pour toutes les autres faces, le joueur perd 30€.

X est la variable aléatoire qui donne le gain du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X
2. Calculer l'espérance mathématique de X . Le jeu est-il équitable ?
3. Calculer l'écart-type. Le jeu est-il risqué ?

Exercice 16. Le paradoxe des trois pièces de monnaie

On lance trois pièces de monnaie. Quelle est la probabilité que toutes trois retombent du même côté, que ce soit pile ou face ?

Une sur quatre. Soit. Pourtant, si je lance trois pièces, il y en a forcément deux qui seront déjà du même côté ; la troisième y sera avec une chance sur deux. J'ai donc une chance sur deux que toutes trois tombent du même côté.

Donner la bonne réponse et commenter la solution proposée.

Exercice 17. Problème de la Belle au bois dormant

On joue avec la Belle au bois dormant qui connaît le protocole suivant. L'expérience dure de dimanche soir à mercredi. Elle se couche le dimanche soir et on tire une pièce équilibrée à pile ou face. si c'est pile, on réveille la Belle le lundi pour un entretien, puis elle se rendort jusqu'à la fin de l'expérience. Si c'est face, on la réveille le lundi, puis le mardi pour deux entretiens, mais elle ne sait jamais quel jour on est. Lors de chaque entretien (la belle ne sait pas les distinguer), on demande à la Belle l'« A votre avis, quelle est la probabilité que pile (resp. face) soit tombé dimanche ? ».

A votre avis, que doit répondre la Belle ?

Exercice 18. Voici l'énoncé de ce problème : dans une émission américaine, un joueur a le choix entre trois portes . Il gagnera ce qui se cache derrière la porte de son choix. Le présentateur sait ce qu'il y a derrière les portes mais n'en dira pas un mot.

Derrière une des portes, une voiture. Derrière les deux autres, deux chèvres (ou tout autre « cadeau » de peu de valeur).

Le candidat choisit une porte. Le présentateur ouvre une des deux autres, derrière laquelle se trouve une chèvre :

- soit le candidat a choisi la porte derrière laquelle il y a une voiture, auquel cas le présentateur ouvre n'importe quelle autre porte ;
- soit le candidat a choisi une porte derrière laquelle il y a une chèvre, et le présentateur ouvre l'autre.

Une fois une porte ouverte, le présentateur propose au candidat de changer son choix. Quelle est, au sens probabiliste, la meilleure stratégie ?