Chapitre 8

Suites

Classe de 1$^{\text{è}re}$ S

D. Zancanaro

2009-2010

"Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous" Thurston Moore
Dernière modification : 8 avril 2010

Table des matières

Cours : Suites

I) Introduction

I-1 Introduction historique

L'un des premiers travaux portant sur les suites de nombres semble provenir d'un certain Archimède (j'en entends déjà se dire d'ici : « encore lui ! », eh oui. . .). Dans son traité La mesure du cercle, pour trouver une valeur approchée de π, il inscrit dans un cercle de rayon 1 un triangle équilatéral dont il calcule le périmètre. Puis en doublant le nombres de côtés, il calcule le périmètre d'un hexagone, puis celui d'un dodécagone et ainsi de suite, indéfiniment. Il obtient ainsi une suite illimitée de nombres connus dont la limite est 2π et qui fournissent très rapidement une bonne approximation de π.
Plus tard, les suites furent formalisées par Cauchy, la maîtrise de cet outil a été grandement facilitée par l'adoption de la notation indicielle au XIX^e siècle qui consiste à noter chaque nombre d'une suite par une même lettre affectée d'un indice.
On doit à Péano la définition d'une suite numérique telle qu'elle est enseigné en première S.

I-2 Introduction

Il arrive que l'on demande, lors de tests psychotechniques par exemple, de compléter "logiquement" une suite de nombres, comme par exemple :

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots$$

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots$$

$$-3, 1, 5, 9, \ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots$$

En mathématiques, une **suite** u est une **liste ordonnée de nombres réels** : les éléments de cette liste :
- Sont appelés **termes**
- Sont repérés par leur rang dans la liste

Le 1^{er} terme de la suite u est souvent noté u_0 (ou u_1),
Le $2^{\text{ème}}$ terme de la suite u est souvent noté u_1 (ou u_2)
. . . .
. . . .
Le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite u est souvent noté u_{n-1} (ou u_n)

Le terme précèdent u_n est u_{n-1}, le suivant u_{n+1}.
On note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour signifier que le rang d'un terme de la suite u est un entier naturel (sans "fin" de liste). On a donc :

$$\overbrace{u}^{\text{nom de la suite}} = (\overbrace{u_0}^{1^{\text{er}}\text{ terme}}\ ;\ \overbrace{u_1}^{2^{\text{nd}}\text{ terme}}\ ;\ u_2\ ;\ \ldots\ ;\ u_{n-1}\ ;\ \overbrace{u_n}^{\text{terme de rang } n}\ ;\ u_{n+1}\ ;\ \ldots)$$

II) Généralités

II-1 Définition

Définition 1 :
Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang n_0. On la note u ou (u_n).

Remarque : u_n désigne l'image de l'entier n, appelé encore terme d'indice n de la suite u, terme que l'on pourrait noté $u(n)$ mais la pratique en a voulu autrement.

Exemple :
La suite des carrés des nombres entiers est définie par $u_n = n^2$ et on a :

$$u_0 = 0 \qquad u_1 = 1 \qquad u_2 = 4 \qquad u_3 = 9 \qquad u_4 = 16, \text{ ect} \ldots$$

Exercice 1 **:**
Déterminer le rang à partir duquel la suite u suivante est définie :

$$u_n = \sqrt{n-4}$$

II-2 Génération d'une suite

On distingue principalement deux manières de définir les suites, de manière explicite ou par récurrence.

II-2.1 Par récurrence

Définition "par récurrence"

$$\boxed{\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}}$$

où f est une fonction définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$.
Cette relation de récurrence permet de calculer un terme de la suite **à partir du terme précèdent**. Par exemple, on se donne
$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2u_n + 1 \end{cases}$
On a ainsi
$u_1 = -2u_0 + 1 = -2 \times \cdots + 1 = \ldots,$
$u_2 = -2u_1 + 1 = -2 \times \cdots + 1 = \ldots,$
$u_3 = -2u_2 + 1 = -2 \times \cdots + 1 = \ldots,$ etc

Avec une calculatrice :

Tapez la valeur du premier terme, puis tapez sur $\boxed{\text{EXE}}$ (ou $\boxed{\text{ENTER}}$)
On utilise la touche $\boxed{\text{Ans}}$ de la calculatrice, qui est un rappel du résultat du calcul précèdent :
Dans notre exemple $-2\times$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $+1$, puis $\boxed{\text{EXE}}$ (ou $\boxed{\text{ENTER}}$)
Vous voyez apparaître la valeur de u_1 ; à chaque fois que vous appuyez sur $\boxed{\text{EXE}}$, le terme suivant de la suite apparaît...

Remarques :
– On visualise ainsi facilement comment l'on passe d'un terme au suivant (le lien logique qui lie les termes entre eux)

– Dans l'exemple précédent, pour calculer u_{100}, il faut connaître u_{99}, et pour calculer u_{99}, il faut connaître u_{98}, ainsi de suite ...Il est alors préférable d'exprimer u_n en fonction de n pour calculer u_{100} directement.

II-2.2 Par une formule explicite

Définition "explicite" du terme de rang n,

$$\boxed{u_n = f(n)}$$

où f est une fonction définie sur un intervalle du type $[a;\infty]$ (avec a réel).
Par exemple, on se donne $u_n = -5+7n$ pour $n \geqslant 0$ ($u_n = f(n)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5+7x$.)
On a ainsi
$u_0 = \dots$, $u_2 = \dots$, $u_3 = \dots$, $u_7 = \dots$, etc

Avec une calculatrice :

Entrez la suite comme une fonction dans le menu "Tableau", par exemple Y1=-5+7X
Puis règlez les paramètres du tableau de valeurs :
Start=0, End=20, Pitch=1 (sur Casio)
TblStart=0, ΔTbl=1 (sur TI)
Puis affichez ce tableau de valeurs : vous avez, dans l'ordre, les termes de cette suite à partir de u_0.

II-3 Sens de variation

II-3.1 Définition

Définition 2 :

Soit (u_n) une suite de nombre réels. On dit que la suite (u_n) est
– croissante (à partir du rang n_0) si et seulement $u_n \leq u_{n+1}$, $\forall n \geq n_0$ où $n \in \mathbb{N}$
– décroissante (à partir du rang n_0) si et seulement $u_n \geq u_{n+1}$, $\forall n \geq n_0$ où $n \in \mathbb{N}$
– monotone (à partir du rang n_0) si et seulement elle est croissante ou décroissante (à partir du rang n_0)
– stationnaire (à partir du rang n_0) si et seulement si $u_n = u_{n+1}$ pour tout entier $n \geq n_0$ (si la suite est définie à partir du rang n_0 alors on dit que la suite est constante)

Remarque : On définit la stricte croissance ou décroissance à l'aide des inégalités strictes suivantes :

$$u_n < u_{n+1} \text{ ou } u_n > u_{n+1}$$

Remarque : Les intervalles d'entiers sont souvent notés à l'aide de crochets doubles. Par exemple :

$$[\![2,5\,]\!] = \{2;3;4;5\}$$

Si bien qu'on pourra écrire, par exemple, qu'une suite est croissante sur $[\![0,+\infty[$

Exercice 2 **:**

Montrer que la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n+3$ est croissante sur $\mathbb{N}$

Remarque : De manière générale, comment étudier les variations d'une suite ?

II-3.2 Méthode : Comment étudier les variations d'une suite ?

Méthodes :

- **On étudie généralement le signe de $u_{n+1} - u_n$ selon les valeurs de n :**
  Par exemple, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = n^2 + 2$, alors on a
  $$u_{n+1} = (n+1)^2 + 2 = n^2 + 2n + 3$$
  Ainsi pour tout n on a $u_{n+1} - u_n = 2n + 1$
  On voit que $u_{n+1} - u_n > 0$, et donc que $u_{n+1} > u_n$ pour tout n : la suite est donc strictement croissante sur $\mathbb{N}$
- **Si jamais tous les termes de la suite u sont strictement positifs, on peut comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 :**
  Par exemple, pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2 \times 5^n$, on a $u_n > 0$ pour tout entier naturel n et
  $$u_{n+1} = 2 \times 5^{n+1}$$
  Ainsi pour tout n on a
  $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5$$
  On voit que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, et donc que $u_{n+1} > u_n$ pour tout n : la suite est donc strictement croissante sur $[\![0, +\infty[$

Exemple :

On considère la suite u définie par $u_n = 2n + \sin n$
Étudions, pour tout entier n, le signe de la différence de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + \sin(n+1) - 2n - \sin n = 2 + \sin(n+1) - \sin n$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $-1 \leq \sin x \leq 1$, par conséquent :

$$2 + \sin(n+1) - \sin n > 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} > u_n$$

La suite u est donc strictement croissante.

Cas des suites définies par $u_n = f(n)$

Théorème 1 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$, avec f définie sur l' intervalle $[a; +\infty[$, où $a \geq 0$
Si la fonction f est monotone (resp. strictement monotone) sur $[a; +\infty[$ alors la suite (u_n) est monotone (resp. strictement monotone) et possède le même sens de variation que la fonction f

Remarque : La réciproque de ce théorème est fausse i.e que l'on peut trouver une suite croissante, par exemple, définie par une fonction non croissante.

Preuve

1. Cas 1 : f est strictement croissante sur $[a;+\infty[$
   Pour tout entier $n \geq a$, f étant strictement croissante sur $[a;+\infty[$,
   $$f(n) < f(n+1) \Longleftrightarrow u_n < u_{n+1}$$
   Par conséquent, (u_n) est strictement croissante.
2. Cas 2 : f est strictement décroissante sur $[a;+\infty[$
   Pour tout entier $n \geq a$, f étant strictement décroissante sur $[a;+\infty[$,
   $$f(n) > f(n+1) \Longleftrightarrow u_n > u_{n+1}$$
   Par conséquent, (u_n) est strictement décroissante.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \cos\dfrac{\pi}{n}$ pour $n \geq 1$

Notons f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{x}$

On a en dérivant : $f'(x) = \dfrac{\pi}{x^2}\sin\dfrac{\pi}{x}$

Or, pour $x \geq 1$, $\dfrac{\pi}{x} \in]0;\pi]$ donc $\sin\dfrac{\pi}{x} \geq 0 \Longleftrightarrow f'(x) \geq 0$, donc la fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$, par conséquent la suite (u_n) est croissante.

Exercice 3 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{3n-1}{n+2}$$

[a]

a. On étudiera, par exemple, les variations de la fonction rationnelle $f : x \longmapsto \dfrac{3x-1}{x+2}$; définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$

II-4 Représentation graphique

Définition 3 :

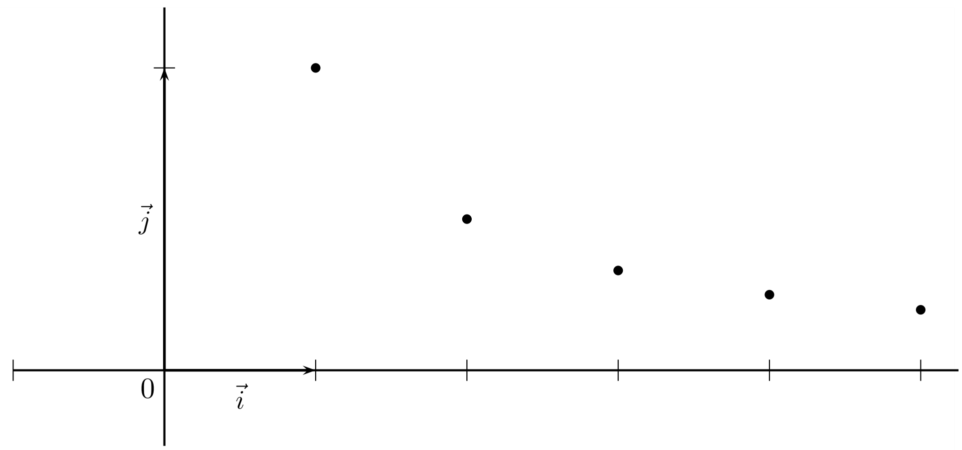
On se place dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. La représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points de coordonnées $(n;u_n)$

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = \frac{1}{n}$$

Sa représentation graphique est donc l'ensemble des points **isolés** de coordonnées $(1;1)$, $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $\left(3, \frac{1}{3}\right)$, $\left(4, \frac{1}{4}\right)$, $\left(5, \frac{1}{5}\right)$, etc…



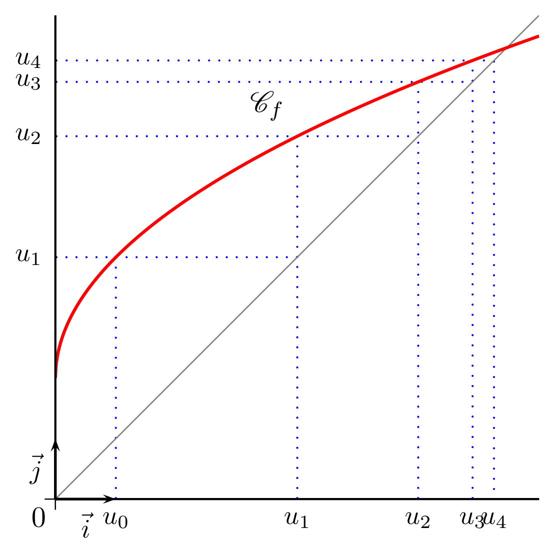
Dans le cas d'une suite récurrente, on ne cherche pas en général à représenter graphiquement la suite comme dans l'exemple précédent (on pourrait très bien le faire). On préfère représenter ses premiers termes sur l'axe des abscisses en s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction définissant la relation de récurrence. On obtient alors un diagramme « en escalier »ou en « en escalier ». On peut alors faire des conjectures sur le sens de variation, ect.

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 2$ et $u_0 = 1$

On considère la fonction f vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ définie par $f = x \longmapsto 2\sqrt{x} + 2$. On a représenté ci-contre la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f et la première bissectrice d'équation $y = x$, puis on a suivi les étapes suivantes :

1. On place u_0 sur l'axe des abscisses et u_1 image de u_0 par f
2. On reporte u_1 sur l'axe des abscisses, à l'aide de la première bissectrice
3. On place u_2 image de u_1 par f, puis on reporte u_2 sur l'axe des abscisses, etc.

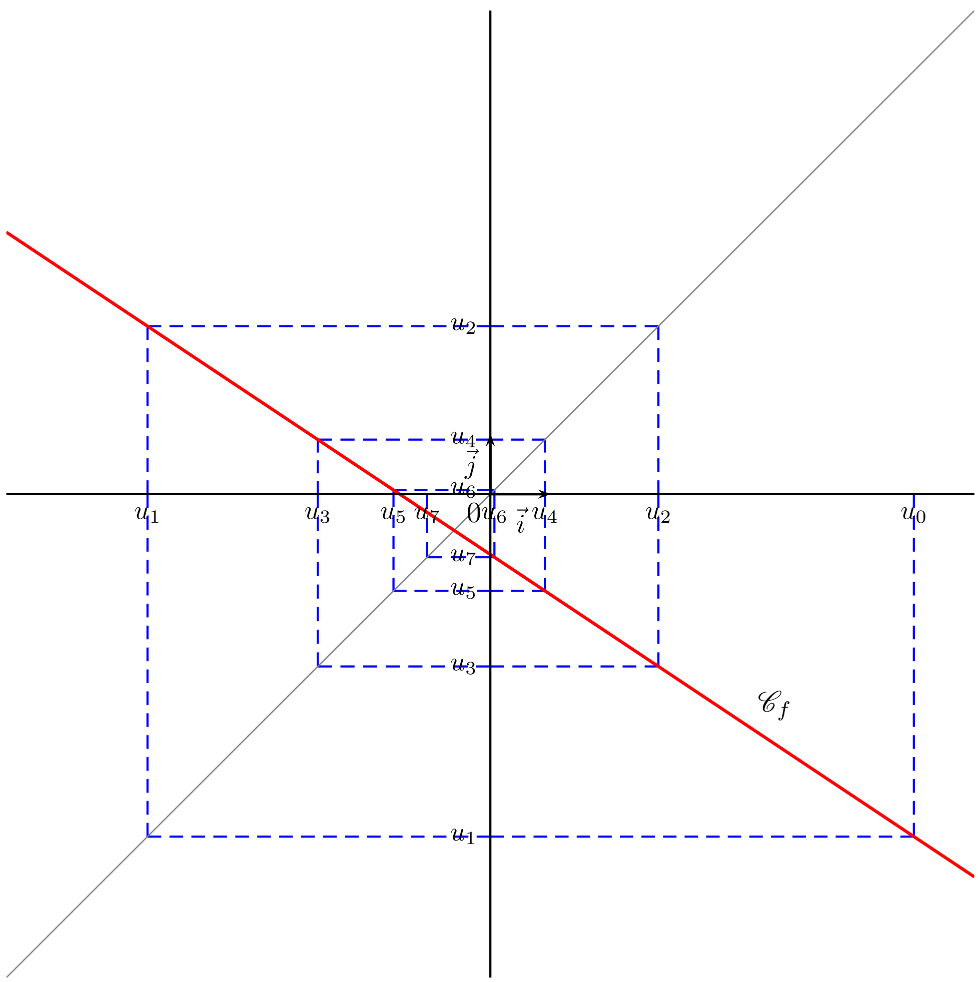


Remarque : Dans l'exemple précédent, on constate que les termes de la suite se rapprochent d'une valeur limite, celle de l'abscisse du point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et la première bissectrice. On dira que la suite converge vers cette valeur.

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par $u_{n+1} = -\dfrac{2}{3}u_n - 1$ et $u_0 = 7$

On considère la fonction f vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ définie par $f = x \longmapsto -\dfrac{2}{3}x - 1$. On a représenté ci-contre la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f et la première bissectrice d'équation $y = x$, puis on a suivi les mêmes étapes que pour l'exemple précédent



Remarque : Comme dans l'exemple précédent, les éléments de la suite semblent se rapprocher d'une valeur précise, on est dans le cas d'une suite convergente

II-5 Limite d'une suite

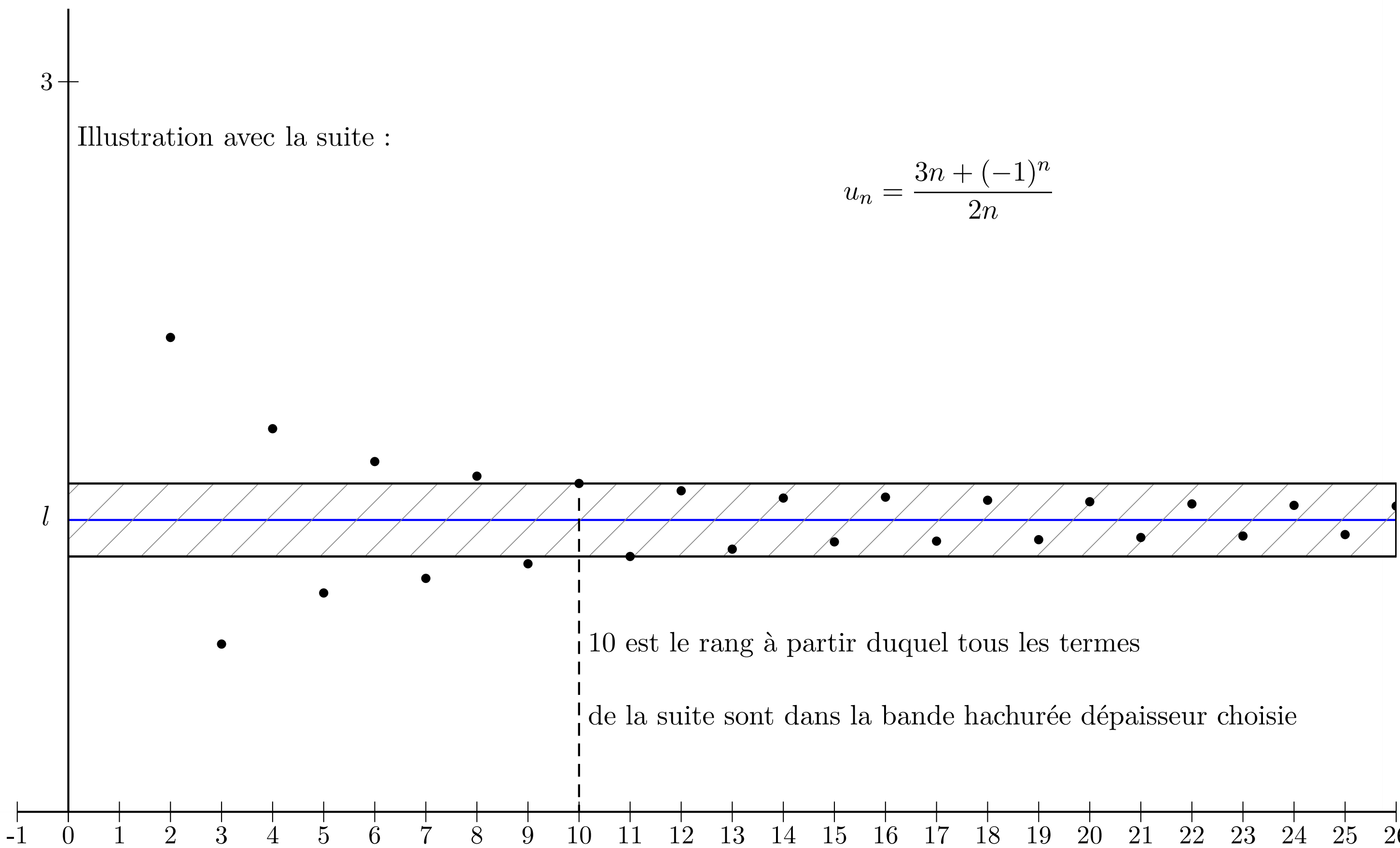
II-5.1 Notion de convergence

Définition 4 :

On dit qu'une suite admet une limite l (ou converge vers l) lorsque :
Tout intervalle ouvert centré en l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang

Remarque : Graphiquement, cela se traduit ainsi :
Quelle que soit la largeur de la bande horizontale choisie, il existe un rang (ou un indice) à partir duquel tous les points de la représentation graphique de la suite sont situés dans cette bande.
De manière plus formelle :
Pour tout réel ε strictement positif, il existe un rang N tel que pour tout indice n, on ait :

$$n \geq N \Longrightarrow | u_n - l | \leq \varepsilon$$



Remarque :

1. Sur cet exemple, le graphique permet de conjecturer que la suite (u_n) converge vers $\frac{3}{2}$
2. Notons, par ailleurs, que toutes les suites ne sont pas convergentes, par exemple $u_n = n$ est une suite divergente car sa limite vaut $+\infty$ ou encore $u_n = (-1)^n$ est une suite qui n'admet pas de limite (valant tantôt 1, tantôt -1). On dit de ces suites qu'elles divergent.

II-5.2 Méthode : Montrer qu'une suite est convergente

Méthode

On utilise les théorèmes énoncés sur les fonctions : $u_n = f(n)$

$$\text{Si} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = l \qquad \text{alors} \qquad \lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

Remarque : Par conséquent, on récupère toutes les règles de calculs sur les limites. De plus les théorèmes de comparaison et le théorème des gendarmes sont valables pour les suites.

Exemple :

Etudions la limite de la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+3}$

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+3}$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2 = 2$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

La suite converge donc vers 2

Exemple :

Considérons la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \qquad \text{pour} \qquad n \geq 1$$

On a l'encadrement suivant :

$$n^2 < n^2 + 1 < (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Par conséquent, par passage à la racine carrée :

$$n < \sqrt{n^2+1} < n+1$$

Puis, en divisant par n qui est strictement positif :

$$1 < u_n < \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$

La suite (u_n) converge vers 1

Exercice 4 :

Etudier la limite des suites (u_n) définies par :

1. $u_n = \dfrac{3n+1}{n} + \dfrac{5}{n^2}$
2. $u_n = \dfrac{3n+(-1)^n}{2n}$ [a]
3. $u_n = n^4(\cos n - 2)$ [b]

---

[a] Poser $v_n = \dfrac{3n-1}{2n}$ et $w_n = \dfrac{3n+1}{2n}$ afin d'utiliser le théorème des gendarmes.

[b] Montrer que, pour tout n, $u_n \leq -n^4$

Remarque : Le cas des suites définies par récurrence sera étudiée au cas par cas au travers d'exercices guidés.

III) Suites arithmétiques

III-1 Généralités

Définition 5 :

Une suite (u_n) est dite arithmétique si et seulement si on ajoute **toujours** le même nombre r pour passer d'un terme au suivant :

$$u_{n+1} = u_n + r \qquad \forall n$$

Ce nombre r s'appelle la raison de la suite (u_n)

Exemple :

La suite des entiers naturels pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2

Méthode

Reconnaître une suite arithmétique :

Pour qu'une suite u soit arithmétique, il faut et il suffit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la diffèrence $u_{n+1} - u_n$ soit constante : $u_{n+1} - u_n = r \in \mathbb{R}$. Le nombre r est la raison de la suite u.

Exercice 5 :

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ?

1. $u_n = 3n - 2$
2. $u_n = n^2 - 3$
3. $u_n = -4n + 1$

Remarque : On aimerait pouvoir calculer le 101 ème terme de la suite arithmétique u définie par $u_{n+1} = u_n + 6$. Pour cela il serait intéressant d'avoir une formule donnant explicitement u_n en fonction de n

Théorème 2 :

On considère une suite (u_n) définie par $u_n = an + b$ où a et b sont deux réels.

(u_n) est une suite arithmétique de raison a

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$u_{n+1} - u_n = a(n+1) + b - an - b = a$$

Théorème 3 :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors $u_n = u_0 + nr$

Preuve

(u_n) étant une suite arithmétique, on a : $u_1 = u_0 + r$, puis $u_2 = u_1 + r (= u_0 + 2r)$, et ainsi de proche en proche on a :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ u_2 &= u_1 + r \\ &\dots\dots \\ u_{n-1} &= u_{n-2} + r \\ u_n &= u_{n-1} + r \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + nr \Longleftrightarrow u_n = u_0 + nr$$

Exercice 6 **:**

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.
Calculer u_{2010}

Théorème 4 :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors pour tous p et n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Preuve

D'après le théorème précédent on a pour tous p et n de $\mathbb{N}$:

$$u_p = u_0 + pr \qquad \text{et} \qquad u_n = u_0 + nr$$

Par conséquent

$$u_n - u_p = u_0 + nr - u_0 - pr = (n-p)r \Longleftrightarrow u_n = u_p + (n-p)r$$

Exercice 7 **:**

Considérons une suite arithmétique (v_n) telle que $v_{27} = 6$ et $v_{39} = 10$
Calculer v_7 et v_{74}

III-2 Sens de variation

Théorème 5 :
On considère une suite (u_n) arithmétique de raison r.

1. Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante ;
2. Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante ;
3. Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Preuve
Comme (u_n) est une suite arithmétique de raison r, on a, par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r \Longleftrightarrow u_{n+1} - u_n = r$$

III-3 Sommes de termes

Remarque : Soit (u_n) une suite. La somme $u_1 + u_2$ comporte deux termes, de même la somme $u_1 + u_2 + u_3$ en comporte 3. De manière générale la somme $u_1 + u_2 + \ldots u_p$ comporte p termes.
Combien en comporte la somme :$u_{14} + u_{15} + \cdots + u_{25}$? On peut remarquer que cette somme s'écrit encore :

$$u_{1+13} + u_{2+13} + \cdots + u_{13+12}$$

Par conséquent elle comporte 12 termes, i.e $25 - 14 + 1$ termes.

Propriété 1 :
La somme $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q$ comporte donc $q - p + 1$ termes (p et q sont des nombres entiers tels que : $p < q$)

Théorème 6 : *Somme des n premiers entiers*

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve
Notons $S = 1 + 2 + \cdots + n - 1 + n$, on a $2S = 1 + 2 + \cdots + n + 1 + 2 + \cdots + n = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \cdots + (n - 2 + 3) + (n - 1 + 2) + (n + 1) = n(n + 1)$ donc $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Exemple :
La somme des 100 premiers entiers est donc :

$$\frac{100 \times 101}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

Théorème 7 :
On considère une suite arithmétique (u_n) et S la somme des n premiers termes de cette suite. On a alors :
$$S = \frac{n(p+d)}{2}$$
p désigne le premier terme de la somme et d le dernier.

Preuve
On a :
$$S = p + (p+r) + (p+2r) + \cdots + (d-2r) + (d-r) + d$$
En inversant l'ordre des termes de cette somme, S s'écrit aussi :
$$S = d + (d-r) + (d-2r) + \cdots + (p+2r) + p$$
Effectuons alors la somme, membre à membre terme à terme, des deux égalités précédentes :
$$2S = (p+d) + (p+r+d-r) + (p+2r+d-2r) + \cdots + (d-2r+p+2r) + (d-r+p+r) + (d+p)$$
Cette somme comporte n termes tous égaux à $p+d$, par conséquent :
$$2S = n(p+d) \Longleftrightarrow S = \frac{n(p+d)}{2}$$

Exercice 8 **:**
1. Calculer la somme des 50 premiers entiers impairs.
2. Calculer la somme des 50 premiers entiers pairs en partant de 12

IV) Suites Géométriques

IV-1 Généralités

Définition 6 :
Une suite u est géométrique si et seulement si, pour tout entier n, on a
$$u_{n+1} = u_n \times q \text{ où } q \text{ est la raison de la suite}$$
Autrement dit, une suite gémétrique est une suite de nombres telle que chacun de ses termes s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre.

Exemple :
La suite des puissances de 2 est une suite géométrique de raison 2 : $u_{n+1} = 2 \times u_n$

Méthode 1

Reconnaître une suite géométrique :
Pour qu'une suite u soit géométrique, il faut et il suffit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les termes u_n soient non nuls et que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit constant : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \in \mathbb{R}^*$.
Le nombre q est la raison de la suite u.

Exercice 9 :

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2}{3^n}$ est géométrique
2. La suite (v_n) est définie par $v_0 = 6$ et $v_{n+1} = 3v_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On note
   $$w_n = v_n + 2$$
   Montrer que (w_n) est une suite géométrique

Méthode 2

Reconnaître une suite géométrique :
Pour montrer qu'une suite u est géométrique, il faut et il suffit de montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_{n+1} = qu_n$

Exercice 10 :

Montrer que la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 \times (-1)^n$

Théorème 8 :

On considère une suite (u_n) définie par $u_n = aq^n$ où a et q sont deux réels non nuls.
(u_n) est une suite géométrique de raison q

Preuve

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = aq^{n+1} = aq^n \times q = qu_n$. Par conséquent la suite est géométrique de raison q

Théorème 9 :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme u_0 alors $u_n = u_0 \times q^n$

Preuve

On peut raisonner de proche en proche. On a :

$$\begin{aligned}
&u_1 = u_0 q\\
&u_2 = u_1 q = u_0 q^2\\
&u_3 = u_2 q = u_0 q^3\\
&\ldots\\
&u_{n-1} = u_{n-2} q = u_0 q^{n-2}\\
&u_n = u_{n-1} q = u_0 q^{n-1}
\end{aligned}$$

Exemple :

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3. On a alors :

$$u_n = 2 \times 3^n$$

On peut, par exemple calculer directement $u_5 = 2 \times 3^5 = 2 \times 243 = 486$

Théorème 10 :

(u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$ alors quels que soient les entiers naturels n et p on a :

$$u_n = q^{n-p} \times u_p$$

Preuve

D'après le théorème précédent, on a :

$$u_n = u_0 q^n \qquad \text{et} \qquad u_p = u_0 q^p$$

donc, puisque $q \neq 0$, $u_0 = \dfrac{u_p}{q^p}$; d'où $u_n = \dfrac{u_p}{q^p} q^n = u_p \times q^{n-p}$

Exercice 11 **:**

(u_n) et (v_n) sont deux suites géométriques. Déterminer u_5, u_8, v_7 et v_{15} sachant que :

1. $u_0 = 6$ et $q = -\dfrac{1}{3}$
2. $v_5 = 1$ et $v_{10} = 32$

IV-2 Sommes de termes

On s'interesse à la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison q, avec $q \neq 1$

Théorème 11 : *Cas particulier* $u_n = q^n$*, avec* $q \neq 1$

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Preuve

Notons $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1}$, on a $qS = q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n$

Par conséquent

$$(1 - q)S = S - qS = 1 - q^n \iff S = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Exemple :

La somme des 10 premiers termes de cette suite géométrique lorsque $q = 2$ est donc :

$$\frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 1023$$

Théorème 12 :
La somme de n termes consécutifs, de premier terme a, d'une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$) est égale à :

$$a\frac{1-q^n}{1-q}$$

Preuve
On calcule donc S, la somme de n termes consécutifs, de premier terme a, d'une suite géométrique de raison q où $q \neq 1$

$$S = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1}) = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

Remarque : Le cas $q = 1$ est trivial :

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a + a + \cdots + a = na$$

Exercice 12 **:**
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et de raison $q = \frac{3}{2}$. Calculer $S = u_4 + u_5 + \cdots + u_{14}$

IV-3 Convergence

Théorème 13 :
Soit (u_n) une suite définie par : $u_n = q^n$ (avec $q > 0$) alors :
- Si $q \in [0; 1[$ la suite (u_n) est convergente vers 0
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante et donc convergente vers 1
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est divergente (vers $+\infty$).

Pour cette démonstration nous allons utiliser le résultat suivant [1]

Lemme 1 : Inégalité de Bernoulli
Pour tout réel x positif et pour tout entier n, on a :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

1. un résultat servant une démonstration est usuellement appelé Lemme

Preuve du lemme

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $(1+x)^n \geq 1+nx$ est vraie
$\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont évidentes
Montrons que $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.
On suppose donc que $(1+x)^n \geq 1+nx$ et on souhaite montrer que : $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$
On a alors, pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
& (1+x)^n \geq 1+nx \\
\Longleftrightarrow \quad & (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) \qquad \text{en multipliant membre à membre par } (1+x) > 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & (1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x \qquad \text{puisque } nx^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Résumons : On a donc $\mathscr{P}(0)$ mais aussi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$, par conséquent on a : pour tout réel x positif et pour tout entier n, on a :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Remarque : Le type de raisonnement que l'on vient d'effectuer s'appelle le raisonnement par récurrence, il sera étudié amplement en terminale.

Preuve du théorème

- $q > 1$
  Posons $x = q-1$, on a alors $x > 0$, et d'après l'inégalité de Bernoulli :
  $$q^n = (1+x)^n \geq 1+nx$$
  Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+nx = +\infty$, par comparaison on en déduit :
  $$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$
  La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$
- $q \in [0;1[$
  Si $q = 0$ le résultat est évident, sinon posons $q' = \dfrac{1}{q}$, dans ce cas $q' \in]1;+\infty[$
  D'après le résultat précédent :
  $$\lim_{n\to+\infty} q'^n = +\infty$$
  Par passage à l'inverse nous obtenons donc :
  $$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$
  La suite (u_n) converge donc vers 0
- $q = 1$, le résultat est alors évident.

Exercice 13 :

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $\frac{1}{2}$. On note s_n la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

1. Exprimer s_n en fonction de n
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} s_n$

« La vie est faite de hasards contraire aux destinées. »

Serge Gainsboug/Johan Sfar, Gainsbourg, vie héroïque