Chapitre 1 : Généralités sur les fonctions

D. Zancanaro C. Aupérin

2009-2010

“Télécharger c’est tuer l’industrie, tuons les tous” Thurston Moore

Dernière modification : 22 novembre 2009

Table des matières

Cours : Généralités sur les fonctions

1 Quelques rappels

1.1 Ensemble de définition

Définition 1. Définir une fonction f sur un ensemble de réels D, c'est associer à tout réel $x \in D$ un réel et un seul, noté $f(x)$

Remarque :
- D sera toujours (à notre niveau) un intervalle ou une réunion d'intervalle
- On dit que $f(x)$ est l'image de x et que x est un antécédent de $f(x)$

Exercice 1.1.
- Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2$ sur $[0;3]$. On note encore :

$$f: \begin{array}{ll} [0;3] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 - 2 \end{array}$$

  Déterminer l'image de -5 et les antécédents éventuels de 4 et -4
- Soit

$$g: \begin{array}{ll} [0;+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x} + 1 \end{array}$$

  Déterminer les antécédents éventuels de 4 et -4

Remarque : On ne peut définir g sur un ensemble plus grand

Définition 2. L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble de tous les réels pour lesquels $f(x)$ est calculable

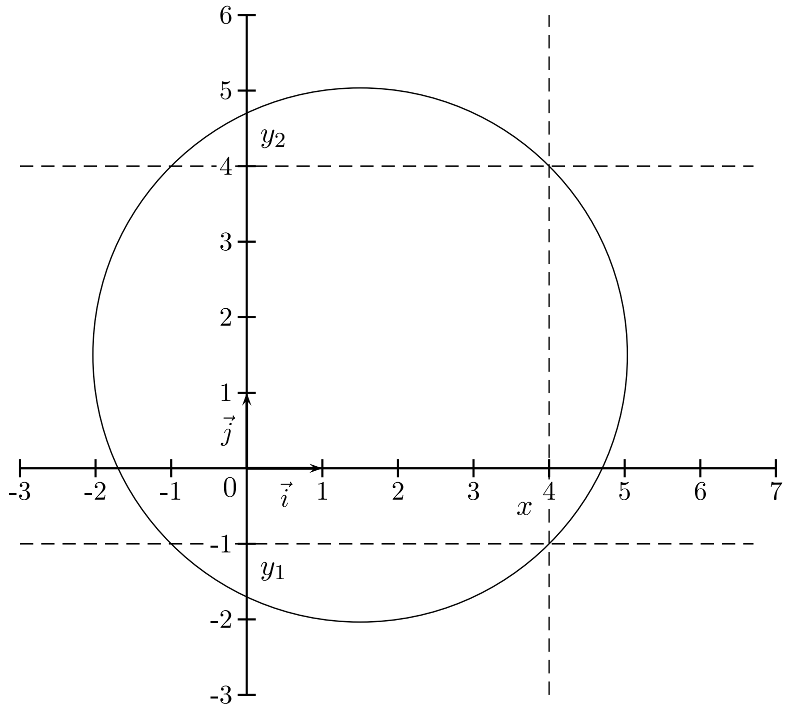
Exemples :
1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Trouver son ensemble de définition.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{4 - 5x}$. Trouver son ensemble de définition.
3. Soit h la fonction définie par $h(x) = \sqrt{-x + 1}$. Trouver son ensemble de définition.

1.2 Courbe représentative

Définition 3. La courbe représentative d'une fonction f définie sur D_f est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x parcourt D_f.

Exemple : Soit la fonction a définie par $a(x) = x^3 - 3x + 1$. Tracer sa courbe représentative.

Remarque : Toutes les courbes ne représentent pas des fonctions. On s'appuie sur la définition pour le comprendre. En effet, un élément ne peut avoir plusieurs images.



1.3 Parité

Définition 4. Soit f une fonction définie sur D_f un intervalle symétrique par rapport à 0. On dit que f est paire si et seulement si pour tout $x \in D_f$ on a $f(x) = f(-x)$.

Exemple : Soit j la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $j(x) = x^2$ est une fonction paire.

Propriété 1. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est possède l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Définition 5. Soit f une fonction définie sur D_f un intervalle symétrique par rapport à 0. On dit que f est impaire ssi pour tout $x \in D_f$ on a $f(x) = -f(-x)$.

Exemple : Soit j la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $j(x) = x^3$ est une fonction impaire.

Propriété 2. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction impaire est possède l'origine du repère comme centre de symétrie.

Exercice 1.2. On considère la fonction r définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $r(x) = x(x-2)$.

1. Étudier la parité de la fonction r.
2. Démontrer que $r(x) = (x-1)^2 - 1$.
3. Démontrer que la fonction r est minorée par -1.
4. Dans un repère orthonormal, tracer soigneusement la représentation graphique C_r de la fonction r (on se limitera à l'intervalle $[-1;3]$)

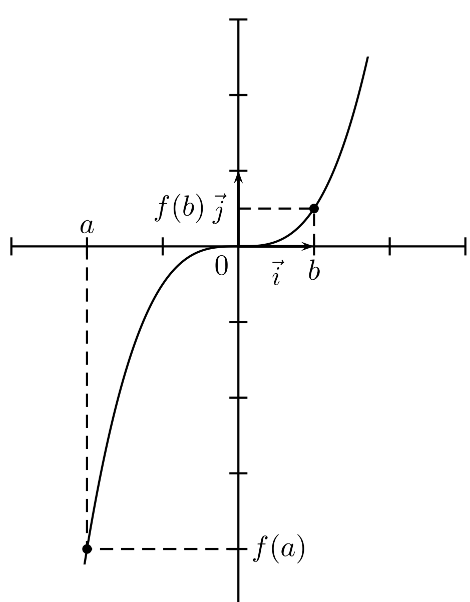
1.4 Variations

Définition 6. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est croissante (respectivement strictement croissante) si pour tous réels a et b de I on a :

$$a < b \Longrightarrow f(a) \leq f(b) \qquad \text{(respectivement } a < b \Longrightarrow f(a) < f(b) \text{)}$$

Remarque : Antécédents et images sont rangés dans le même ordre, on dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre.

Exemple :

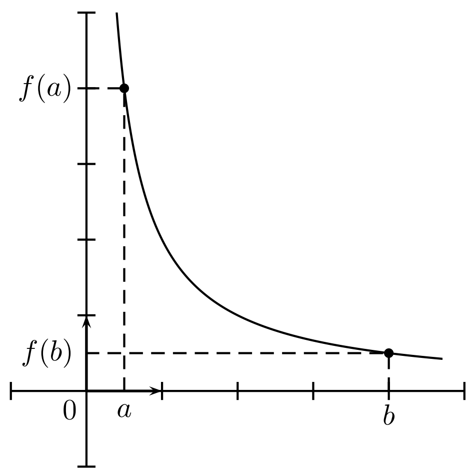


Définition 7. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est décroissante (respectivement strictement décroissante) si pour tous réels a et b de I on a :

$$a < b \Longrightarrow f(a) \geq f(b) \qquad \text{(respectivement } a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)\text{)}$$

Remarque : Antécédents et images sont rangés dans l'ordre inverse, on dit qu'une fonction décroissante inverse l'ordre.

Exemple :

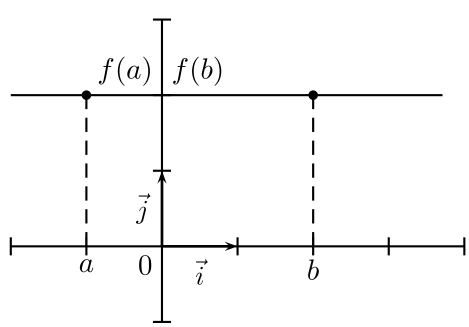


Remarque : On ne parle de fonction croissante ou décroissante que sur un intervalle, les bornes ouvertes ou fermées ne jouant aucun rôle.

Remarque : On parle de fonction monotone sur un intervalle I si celle-ci y est soit croissante, soit décroissante.

Définition 8. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est constante si pour tous réels a et b de I on a $f(a) = f(b)$

Exemple :



Remarque : La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Exercice 1.3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$. Montrer que f est croissante.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 5$. Montrer que g est décroissante.

Exercice 1.4. Soit z la fonction définie par $z(x) = \dfrac{3}{x-3}$.

1. Quel est son ensemble de définition ?
2. Quelles sont les images de 6 ? 4 ? 0 ?
3. Quels sont les antécédents de 12 ? 8 ?
4. Démontrer que la fonction est décroissante sur $[3; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; 3]$.
5. Dresser le tableau de variations de z.
6. Tracer la courbe représentative de z.

1.5 Extrema

Définition 9. Soit f une fonction définie sur un intervalle Iet $a \in I$. On dit que f admet un maximum en a si, pour tous réels $x \in I$ on a : $f(x) \leq f(a)$.
$f(a)$ est le maximum de f sur I, atteint en a.

Exemple : Quel est le maximum de la fonction t définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = -x^2 + 3$?
Pour tout x on a $-x^2 \leq 0 \Longleftrightarrow -x^2 + 3 \leq 3 \Longleftrightarrow t(x) \leq t(0)$.
Donc le maximum de t est 3, atteint en 0 (pour $x = 0$.

Définition 10. Soit f une fonction définie sur un intervalle Iet $a \in I$. On dit que f admet un minimum en a si, pour tous réels $x \in I$ on a : $f(x) \geq f(a)$.
$f(a)$ est le minimum de f sur I, atteint en a.

Exemple : Quel est le minimum de la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = x^2 - \sqrt{3}$?
Pour tout x on a $x^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2 + \sqrt{3} \geq \sqrt{3} \Longleftrightarrow v(x) \geq v(0)$.
Donc le minimum de v est $\sqrt{3}$, atteint en 0 (pour $x = 0$.

Remarque : On parle d'extremum lorsque la fonction admet soit minimum, soit maximum.

Exercice 1.5. Quel est le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -(x-2)^2 + 4$?

2 Comparaison de deux fonctions

Définition 11. Soit D une partie de $\mathbb{R}$. On dit que f et g sont égales sur D si : $f(x) = g(x)$, pour tout $x \in D$. On note $f = g$ sur D

Exemples : Considérons les fonctions f, g et h définies par :

1.
$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x^2} \end{array}$$

2.
$$g: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mid x \mid \end{array}$$

3.
$$h: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x \end{array}$$

On a $f = g$ sur $\mathbb{R}$, $f = h$ sur $\mathbb{R}^+$ et $g = h$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2.1. Soit f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}$ et $g(x) = x+2$. Sur quel ensemble a-t-on $f = g$?

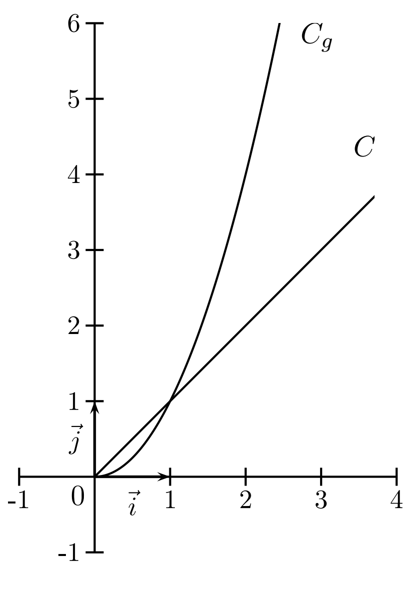
Définition 12. Soit I un intervalle et soient f et g deux fonctions définies au moins sur I. On dit que :

1. f est inférieure à g sur I lorsque : $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$. On note $f \leq g$ sur I
2. f estpositive ou négative sur I lorsque : $f(x) \geqslant 0$ (ou $f(x) \leq 0$) pour tout $x \in I$. On not $f \geqslant 0$ (ou$f \leq 0$) sur I
3. f est majorée sur I lorsqu'il existe un réel M tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$
4. f est minorée sur I lorsqu'il existe un réel m tel que $f(x) \geqslant m$ pour tout $x \in I$
5. f est bornée sur I lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Remarque : La relation d'ordre pour les fonctions n'est pas totale, en ce sens que deux fonctions ne sont pas toujours comparables

Exemple : On considère les fonctions f et g sur $\mathbb{R}^+$ définies par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$
Les fonctions f et g ne sont pas comparables sur $\mathbb{R}^+$.
En revanche on a : $f \geqslant g$ sur $[0;1]$
De plus $f \leq g$ sur $[1;+\infty[$
Pour prouver ces affirmations il suffit d'étudier le signe de la différence $f - g$:

$$f(x) - g(x) = x - x^2 = x(1-x)$$



On dresse le tableau de signe pour conclure :

x	0		1		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f-g$	0	$+$	0	$-$	

Remarque : En conséquence de l'exemple précédent : un nombre n'est pas toujours inférieur à son carré !

Exercice 2.2.

1. Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = x(1-x)$ est majorée sur $\mathbb{R}$ par $\frac{1}{4}$. En déduire que f admet $\frac{1}{4}$ comme maximum.
2. Démontrer que la fonction ϕ, définie par $\phi(x) = 3\sin x - 1$ est bornée sur $\mathbb{R}$

Propriété 3. Soit f une fonction monotone sur un intervalle $I = [a; b]$ alors f est bornée

Démonstration :

Supposons que f est croissante sur $[a; b]$, et soit $x \in I$, on a :

$$a \leq x \leq b$$

et donc : $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. f est donc à la fois majorée et minorée, elle est donc bornée.
Supposons que f est décroissante sur $[a; b]$, et soit $x \in I$, on a :

$$a \leq x \leq b$$

et donc : $f(a) \geqslant f(x) \geqslant f(b)$. f est donc à la fois majorée et minorée, elle est donc bornée.

3 Opérations sur les fonctions

3.1 Somme, produit, quotient..

Définition 13. f et g sont deux fonctions définies sur I et λ désigne un réel quelconque.

1. Les fonctions $f+g$, fg, λf et $f+\lambda$ sont les fonctions définies sur D par :

   $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
   $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$
   $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
   $(f+\lambda)(x) = f(x) + \lambda$

2. Si de plus, pour tout $x \in I$ $g(x) \neq 0$, la fonction notée $\frac{f}{g}$ est la fonction définie sur I par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Exemples : f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mid x \mid$ et $g(x) = x - 2$. Alors :

- $(f+g)(x) = \mid x \mid + x - 2$
- $(fg)(x) = \mid x \mid \times (x-2)$
- $(3g)(x) = 3(x-2)$
- $(2+g)(x) = 2 + x - 2 = x$
- pour tout $x \neq 2$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\mid x \mid}{x-2}$

Exercice 3.1. f et g sont deux fonctions affines et λ désigne un réel. Démontrer que $f+g$ et λf sont des fonctions affines. Qu'en est-il de $f+\lambda$, fg et $\dfrac{f}{g}$

3.2 Sens de variation

Propriété 4. Si f est une fonction monotone sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors les fonctions f et $f+\lambda$ ont même sens de variation sur I

Démonstration :

Si f est décroissante sur I :
Soit a et b deux réels de I tels que $a \leq b$. Comme f est décroissante sur I on a :

$$f(a) + \lambda \geqslant f(b) + \lambda$$

Donc la fonction $f+\lambda$ est décroissante sur I

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x - 1$ est strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ puisque les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto 2x - 1$ le sont

THÉORÈME 1. Soient f et g deux fonctions définies au moins sur le même intervalle I
- Si f et g sont croissante (respectivement décroissante) sur I alors $f+g$ est croissante (respectivement décroissante) sur I
- Si f est croissante sur I et $\lambda > 0$ (respectivement $\lambda < 0$) alors la fonction λf est croissante (respectivement décroissante) sur I
- Si f est décroissante sur I et $\lambda > 0$ (respectivement $\lambda < 0$) alors la fonction λf est décroissante (respectivement croissante) sur I

Démonstration :

Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$:

1. Comme f et g sont croissantes sur I on a : $f(a) \leq f(b)$ et $g(a) \leq g(b)$, en somme :

$$f(a) + g(a) \leq f(b) + g(b)$$

   Ainsi $f+g$ est croissante sur I.
2. L'inégalité $f(a) \leq f(b)$ devient $\lambda f(a) \leq \lambda f(b)$ si $\lambda > 0$ et $\lambda f(a) \geqslant \lambda f(b)$ si $\lambda < 0$, ce qui prouve le deuxième résultat

Exercice 3.2. Étudier le sens de variation de la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = -\dfrac{2}{x}$

Remarque : Il n'y a pas de règle aussi simple pour le produit de deux fonctions. Considérons les fonctions f et g croissantes sur $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = x$ et $g(x) = x^4$ alors le produit $fg(x) = x^5$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Exercice 3.3. Soient f et g deux fonctions positives et croissantes sur un intervalle I. Démontrer que le produit fg est une fonction croissante sur I

4 Composition de fonctions

4.1 Définition

Dans cette partie on désigne par f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g.

Définition 14. La fonction composée de g suivie de f, notée $f \circ g$, est la fonction définie par :

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

Exemples :

1. Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$ alors :

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = g(x) + 1 = x^2 - 1 + 1 = x^2$$

2. Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ alors :

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x+1}$$

Dans ce deuxième exemple l'ensemble de définition de $g \circ f$ $(\mathbb{R} - \{-1\})$ n'est pas le même que celui de f et de g

Exercice 4.1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$, g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\dfrac{1}{x}$

1. Déterminer $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ f$, $h \circ g$ et $g \circ h$
2. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions précédentes

Propriété 5. L'ensemble de définition de $f \circ g$ est l'ensemble des réels x tels que :

$$x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f$$

Démonstration :

L'ensemble de définition de $f \circ g$ est l'ensemble des réels x tels que $f \circ g(x)$ est calculable, or $f \circ g(x) = f[g(x)]$.
Pour que $f \circ g(x)$ soit calculable il faut dans un premier temps que $g(x)$ soit calculable donc :

$$x \in D_g$$

Dans un second temps on doit appliquer f au nombre $g(x)$ donc :

$$g(x) \in D_f$$

Au final on a bien :

$$x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f$$

4.2 Sens de variation

Notation : On note $f(I)$ l'ensemble des valeurs $f(x)$ où $x \in I$

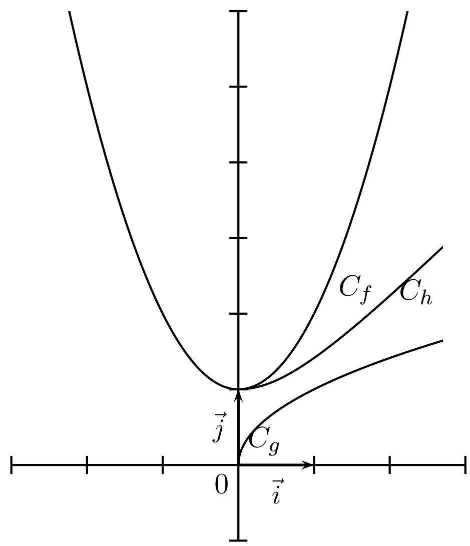
THÉORÈME 2.
1. Si f et g ont le même sens de variation (f sur I et g sur $f(I)$) alors $g \circ f$ est croissante sur I
2. Dans le cas contraire $g \circ f$ est décroissante sur I

Démonstration :

Cas où f est croissante sur I
Soient a et b deux réels de I tels que $a \leq b$, alors $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à $f(I)$ et $f(a) \leq f(b)$
- Si g est croissante sur $f(I)$, alors $g[f(a)] \leq g[f(b)]$ i.e $g \circ f(a) \leq g \circ f(b)$, donc $g \circ f$ est croissante sur I
- Si g est décroissante sur $f(I)$, alors $g[f(a)] \geqslant g[f(b)]$ i.e $g \circ f(a) \geqslant g \circ f(b)$, donc $g \circ f$ est décroissante sur I

Exemple : Étudions le sens de variation de la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{1+x^2}$
On décompose h de la façon suivante $h = g \circ f$ où $f(x) = 1 + x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
La fonction f est décroisante sur $\mathbb{R}^-$ et la fonction g est croissante sur $f(\mathbb{R}^-)$ $=]1;+\infty[$, donc h est décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
La fonction f croissante sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction g est croissante sur $f(\mathbb{R}^+)$ $=]1;+\infty[$, donc h est croissante sur $\mathbb{R}^+$

Illustration



Exercice 4.2.

1. Étudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]-\infty;1]$ par $h(x) = \sqrt{1-x}$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction h définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

5 Représentation graphique des fonctions associés

Dans cette partie on note f une fonction définie sur I et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

5.1 Courbe représentative de $f + \lambda$

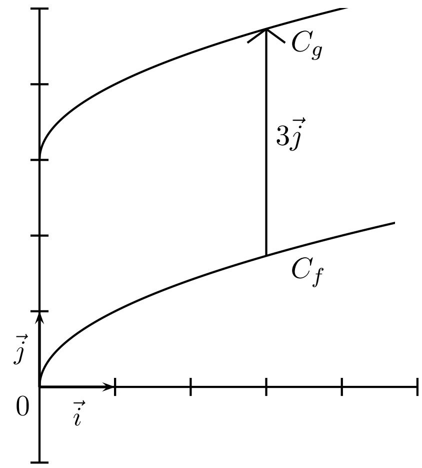
THÉORÈME 3. La courbe C_g représentant la fonction g définie par $g(x) = f(x) + \lambda$ est l'image de C_f par la translation de vecteur $\lambda\vec{j}$

Démonstration :

Soit $M(x, f(x))$ un point de la courbe C_f, le point de coordonnées $M'(x; f(x) + \lambda)$ est un point de C_g. De plus $\overrightarrow{MM'} = \lambda\vec{j}$

Exercice 5.1. Soit f la fonction « racine carrée »et C_f sa courbe représentative. Représenter la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x} + 3$

Illustration



5.2 Courbe représentative de $x \mapsto f(x + \lambda)$

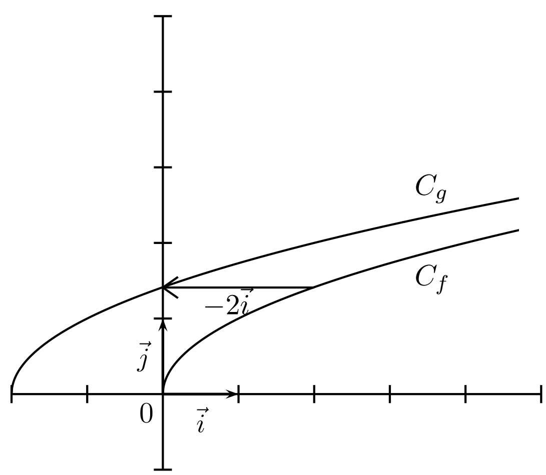
THÉORÈME 4. La courbe C_g représentant la fonction g définie par $g(x) = f(x + \lambda)$ est l'image de C_f par la translation de vecteur $-\lambda\vec{i}$

Démonstration :

> Soit $M(x, f(x))$ un point de la courbe C_f. Le d'abscisse $x-\lambda$ de C_g a pour ordonnées : $g(x-\lambda) = f(x)$. Donc $M'(x - \lambda; f(x))$ est un point de C_g. De plus $\overrightarrow{MM'} = -\lambda\vec{i}$

Exercice 5.2. Soit f la fonction « racine carrée »et C_f sa courbe représentative. Représenter la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x + 2}$

Illustration



5.3 Courbe représentative de $x \mapsto -f(x)$

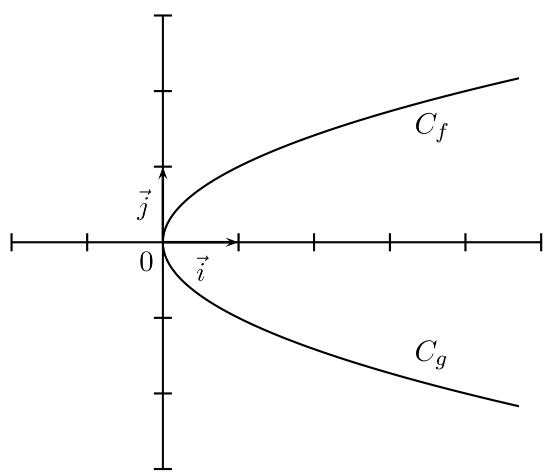
THÉORÈME 5. La courbe C_g représentant la fonction g définie par $g(x) = -f(x)$ est l'image de C_f par la symétrie d'axe celui des absisses

Démonstration :

Soit $M(x, f(x)$ un point de la courbe C_f, le point de coordonnées $M'(x; -f(x))$ est un point de C_g. Le milieu E du segment $[MM']$ a pour coordonnées $E(x; 0)$, il est donc sur l'axe des abscisses.
Conséquence : Pour tout point M de C_f d'abscisse x le point M' de C_g d'absisse x est l'image de M par la symétrie d'axe (Ox).

Exercice 5.3. Soit f la fonction « racine carrée »et C_f sa courbe représentative. Représenter la fonction g définie par $g(x) = -\sqrt{x}$

Illustration



5.4 Courbe représentative de $x \mapsto f(-x)$

THÉORÈME 6. La courbe C_g représentant la fonction g définie par $g(x) = f(-x)$ est l'image de C_f par la symétrie d'axe celui des ordonnées

Démonstration :

> Soit $M(x, f(x)$ le point de la courbe C_f d'abscisse x et soit $M'(-x; g(-x) = f(x)$ le point d'abscisse $-x$ de C_g. Le milieu E du segment $[MM']$ a pour coordonnées $E(0; f(x))$, il est donc sur l'axe des ordonnées.
> Conséquence : Pour tout point M de C_f d'abscisse x le point M' de C_g d'absisse $-x$ est l'image de M par la symétrie d'axe (Oy).

Exercice 5.4. Soit f la fonction « racine carrée »et C_f sa courbe représentative. Représenter la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{-x}$

Illustration