

---

## Chapitre 6 : Dérivation

D. Zancanaro      C. Aupérin

2009-2010

---

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Nombre dérivé</b>	<b>1</b>
1.1	Définition . . . . .	1
1.2	Interprétation géométrique . . . . .	3
1.3	Equation de la tangente . . . . .	4
1.4	Approximation affine associée à une fonction . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Fonction dérivée</b>	<b>5</b>
2.1	Définitions . . . . .	5
2.2	Tableau des dérivées . . . . .	6
2.2.1	Tableau des dérivées des fonctions de références . . . . .	6
2.2.2	Opérations sur les dérivées . . . . .	7
2.2.3	Dérivée des fonctions de la forme $f(x) = g(ax + b)$ . . . . .	9
2.2.4	Dérivée des fonctions de la forme $f(x) = g \circ h(x)$ . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Applications</b>	<b>10</b>
3.1	Signe de la dérivée et variation . . . . .	10
3.2	Extremum local . . . . .	12

## Cours : Dérivation

### Introduction

En mathématiques, la dérivation élémentaire est le calcul permettant de définir une variation de phénomène par unité de temps ou par unité géométrique.

La notion de nombre dérivé a vu le jour au XVII<sup>e</sup> siècle dans les écrits de Leibniz et de Newton qui la nomme fluxion et qui le définit comme « le quotient ultime de deux accroissements évanescents ».

Dès la seconde moitié du XVII<sup>e</sup> siècle, le domaine mathématique de l'analyse numérique connut une avancée prodigieuse grâce aux travaux de Newton et de Leibniz en matière de calcul différentiel et intégral, traitant notamment de la notion d'infiniment petit et de son rapport avec les sommes dites intégrales. C'est cependant Blaise Pascal qui, dans la première moitié du XVII<sup>e</sup> siècle, a le premier mené des études sur la notion de tangente à une courbe - lui-même les appelait « touchantes » ; le marquis de l'Hôpital participera aussi à la fin du XVII<sup>e</sup> siècle à étoffer cette nouvelle théorie, notamment en utilisant la dérivée pour calculer une limite dans le cas de formes indéterminées particulières (voir Règle de L'Hôpital). Wallis, mathématicien anglais (surtout connu pour la suite d'intégrales qui porte son nom) contribua également à l'essor de l'analyse différentielle.

Néanmoins cette théorie tout juste éclore n'est pas encore pourvue de toute la rigueur mathématique qu'elle aurait exigée, et notamment la notion d'infiniment petit introduite par Newton, qui tient plus de l'intuitif, et qui pourrait engendrer des erreurs dès lors que l'on ne s'entend pas bien sur ce qui est ou non négligeable. C'est au XVIII<sup>e</sup> siècle que d'Alembert introduit la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement - sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui pose problème : elle n'est pas encore construite formellement. C'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé. C'est à Lagrange (fin du XVIII<sup>e</sup> siècle) que l'on doit la notation  $f'(x)$ , aujourd'hui tout à fait usuelle, pour désigner le nombre dérivé de  $f$  en  $x$ .

## 1 Nombre dérivé

### 1.1 Définition



#### Définition 1 :

On dit qu'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  contenant  $a$  est dérivable en  $a$  s'il existe un réel  $A$  tel que :

$$\text{Pour tout } h \text{ tel que } a + h \in I : f(a + h) = f(a) + Ah + h\varphi(h) \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

Le nombre  $A$  s'appelle le nombre dérivé de la fonction  $f$  en  $a$ . On le note  $A = f'(a)$



#### Exemple :

La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 3x - 4$  est-elle dérivable en  $a$  ?

 **Preuve**

Pour le savoir, calculons  $f(a+h)$  :

$$f(a+h) = (a+h)^2 + 3(a+h) - 4 = a^2 + 2ah + h^2 + 3a + 3h - 4 = a^2 + 3a - 4 + h(2a+3) + h \times h$$


$$f(a+h) = f(a) + Ah + h\varphi(h) \quad \text{avec } A = 2a+3 \text{ et } \varphi(h) = h \quad (\text{on a bien : } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0)$$

Par conséquent la fonction  $f$  est dérivable pour tout réel  $a$  et on a  $f'(a) = 2a+3$

 **Exercice 1.1** :

Calculer (s'il existe) le nombre dérivé  $A$  de la fonction « carré »  $f(x) = x^2$ , d'une fonction affine  $f(x) = mx + p$  et d'une fonction constante  $f(x) = k$

Le théorème suivant donne un critère pour voir si une fonction est dérivable ou pas (il s'avère plus maniable dans certains cas que la définition)

 **Théorème 1** :

Une fonction  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Sa valeur est le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  que l'on note  $f'(a)$

**Remarque** : La quantité  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  s'appelle le taux de variation de  $f$  entre  $a$  et  $a+h$

 **Preuve**

$\Rightarrow$  Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors il existe un réel  $A$  tel que :

$$\text{Pour tout } h \text{ tel que } a+h \in I : f(a+h) = f(a) + Ah + h\varphi(h) \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

$$\text{Par conséquent on a } \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A + \varphi(h) \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0, \text{ et donc :}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A$$

ce qui prouve bien que la limite existe et est finie

$\Leftarrow$  Si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$

alors il existe une fonction  $\varphi$  telle que :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A + \varphi(h) \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

donc on a bien l'écriture  $f(a+h) = f(a) + Ah + h\varphi(h)$

💡 **Exemple :**

La fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^3 - 5$  est-elle dérivable en 2 ?

👤 **Preuve**

Pour le savoir, calculons  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$  :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^3 - 5 - 2^3 + 5}{h} = \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} = 12 + 6h + h^2$$

Comme  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 12$ ,  $f$  est dérivable en 2 et on a  $f'(2) = 12$

🍃 **Exercice 1.2 :**

Montrer que la fonction « racine carrée »  $f(x) = \sqrt{x}$  est dérivable pour tout réel de l'intervalle  $]0; +\infty[$  mais pas en 0

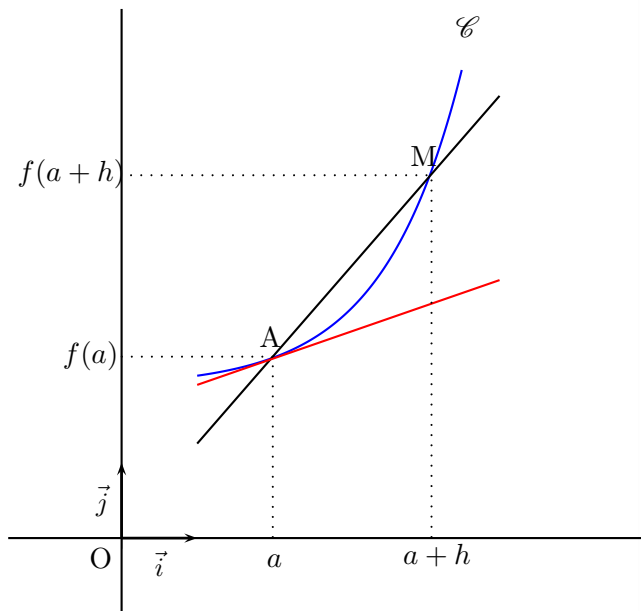
## 1.2 Interprétation géométrique

On considère une fonction  $f$  dérivable en  $a \in \mathbb{R}$  et  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $A(a; f(a))$  et  $M(a+h, f(a+h))$  deux points de  $\mathcal{C}$ . Le coefficient directeur de la droite  $(AM)$  est :


$$\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Lorsque le point  $M$  se rapproche de  $A$ , i.e lorsque  $h$  tend vers 0, le réel  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  tend vers le réel  $f'(a)$ . De plus géométriquement, la droite  $(AM)$  tend à se confondre avec la tangente en  $A$  de  $\mathcal{C}$  (un seul point de contact)



🔴 **Propriété 1 :**

Le nombre dérivé  $f'(a)$  est le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $A$  d'abscisse  $a$

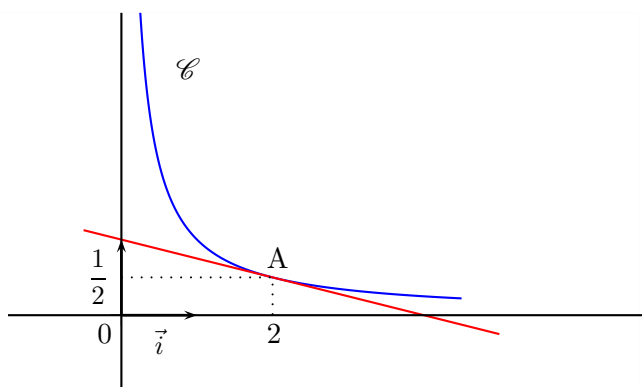
 **Exercice 1.3 :**

$f$  est la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Dans le repère ci-contre,  $\mathcal{C}$  est la représentation graphique de  $f$  et  $T$  la tangente à  $\mathcal{C}$  au point  $A$  d'abscisse 2.

Lire Sur le graphique le nombre dérivé de  $f$  en 2



### 1.3 Equation de la tangente


On considère une fonction  $f$  dérivable en  $a \in \mathbb{R}$  et  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $A$  le point d'abscisse  $a$  de  $\mathcal{C}$ . D'après la partie précédente, l'équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  passant par  $a$  est de la forme :

$$y = mx + p \quad \text{avec } m = f'(a)$$

De plus, comme  $A(a; f(a))$  est un point de  $T$ , les coordonnées de  $A$  vérifient l'équation de  $T$  :


$$f(a) = f'(a)a + p \iff p = f(a) - f'(a)a$$

Au final l'équation de  $T$  est  $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a \iff y = f'(a)(x - a) + f(a)$

 **Propriété 2 :**

Une équation de la tangente au point d'abscisse  $a$  d'une fonction  $f$  dérivable en  $a$  est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

 **Exercice 1.4 :**

$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -3x^2 + 2$ .  $g$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $g(x) = \frac{6}{x} - 7$ .  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  sont les courbes représentatives de  $f$  et  $g$  dans un repère.

1. En utilisant des taux de variation, démontrer que  $f$  et  $g$  sont dérivables en 1, puis donner  $f'(1)$  et  $g'(1)$
2. En déduire que  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  admettent la même tangente  $T$  au point d'abscisse 1. Déterminer une équation de  $T$

### 1.4 Approximation affine associée à une fonction

**But :** Il existe des fonctions qui demandent des calculs complexes, et parfois il n'est pas utile de connaître les valeurs exactes, alors on a recours à d'autres fonctions simples qui approximent efficacement la fonction de départ. L'approximation affine est l'approximation d'une fonction par une fonction affine.

**Lien avec les dérivées :** Considérons une fonction  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$  contenant  $a$ . Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors :

$$\text{Pour tout } h \text{ tel que } a + h \in I : f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\varphi(h) \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

Etant donné que pour  $h$  tendant vers 0  $h\varphi(h)$  est une quantité qui tend vers 0, cette quantité peut être considéré comme négligeable et donc pour  $h$  proche de 0 on aura :

$$f(a + h) \simeq f(a) + hf'(a)$$



### Propriété 3 :

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$  et définie sur un intervalle contenant  $a$ . On dit que  $f(a) + hf'(a)$  est l'approximation affine de  $f(a + h)$  pour  $h$  proche de 0



### Exercice 1.5 :

$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$

- Déterminer l'approximation affine de  $f(1 + h)$  pour  $h$  proche de 0 et préciser l'erreur
- Calculer mentalement une valeur approchée de  $(1,024)^2$  et un majorant de l'erreur

**Solution :**

- Pour tout réel  $h \neq 0$ ,  $\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = h + 2$

Lorsque  $h$  tend vers 0,  $h + 2$  tend vers 2. Par conséquent  $f$  est dérivable en 1 et  $f'(1) = 2$ . Or pour  $h$  proche de 0,  $f(1 + h) \simeq f(1) + hf'(1)$ , donc :

$$f(1 + h) \simeq 1 + 2h$$

Comme  $f(1 + h) = 1 + 2h + h^2$ , l'erreur commise est  $e(h) = h^2$

- $1,024 = 1 + 0,024$ ; on applique l'approximation de (1) avec  $h = 0,024$  et on trouve :

$$1,024^2 \simeq 1 + 2 \times 0,024 = 1,048$$

$$e(h) = 0,024^2 < 0,03^2 \leq 0,0009$$

## 2 Fonction dérivée

### 2.1 Définitions



### Définition 2 :

On dit qu'une fonction  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  si  $f$  est dérivable pour tout  $a \in I$ .



### Exemple :

Nous avons vu dans un exemple précédent, que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 + 3x - 4$  est dérivable pour tout réel  $a$  et que son nombre dérivé en  $a$  est  $A = f'(a) = 2a + 3$ .

On dit donc que cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$

Il est donc naturel de définir une nouvelle fonction qui à  $x$  associe le nombre dérivé  $f'(x)$ . Cette fonction s'appelle la dérivée de  $f$  et se note  $f'$ .

La dérivée de la fonction  $f : x \mapsto x^2 + 3x - 4$  est donc  $f' : x \mapsto 2x + 3$ .


**Définition 3 :**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$ . On appelle fonction dérivée, que l'on note  $f'$ , la fonction qui à  $x \in I$  associe  $f'(x)$

## 2.2 Tableau des dérivées

### 2.2.1 Tableau des dérivées des fonctions de références

TABLE 1 – Tableau des dérivées des fonctions de références

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
$k$ (nombre fixé)	0	$\mathbb{R}$
$x$	1	$\mathbb{R}$
$x^2$ (fonction carrée)	$2x$	$\mathbb{R}$
$x^3$ (fonction cube)	$3x^2$	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$ (fonction puissance)	$nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$ (fonction inverse)	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\sqrt{x}$ (fonction racine)	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\sin(x)$ (fonction sinus)	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$ (fonction cosinus)	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$




 **Preuve**

A titre d'exemple, démontrons le pour le cas de la fonction inverse :

Pour tous réels  $a \neq 0$  et  $h \neq 0$  avec  $a + h \neq 0$ ,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{a - (a+h)}{ha(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

ce qui tend vers  $-\frac{1}{a^2}$  lorsque  $h$  tend vers 0

 **Exercice 2.6** :

$f$  est la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x}$ . Démontrer que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et calculer  $f'(x)$ .

Enfin démontrer que  $f$  n'est pas dérivable en 0

### 2.2.2 Opérations sur les dérivées

Dans le tableau suivant,  $u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  et  $k$  désigne un nombre réel.

Remarquons que les fonctions ci-dessous sont dérivables sur  $I$ .

Fonctions	Dérivées	Exemples
$ku$	$ku'$	Si $f(x) = 5x^3$ alors $f'(x) = 15x^2$
$u + v$	$u' + v'$	Si $f(x) = x + \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
$u \times v$	$u'v + uv'$	Si $f(x) = x\sqrt{x}$ alors $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$
$u^n, n \in \mathbb{Z}$	$nu^{n-1} \times u'$	Si $f(x) = (7x + 3)^7$ alors $f'(x) = 49(7x + 3)^6$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ alors $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{3x + 2}{4 - 2x}$ alors $f'(x) = \frac{3(4 - 2x) - (3x + 2) \times (-2)}{(4 - 2x)^2} = \frac{16}{(4 - 2x)^2}$

 **Preuve**

1. Pour tous réels  $a$  et  $a + h$  de l'intervalle  $I$ , avec  $h \neq 0$  on a :

$$\frac{(ku)(a+h) - (ku)(a)}{h} = \frac{ku(a+h) - ku(a)}{h} = k \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

ce qui tend vers  $ku'(a)$  quand  $h \rightarrow 0$

2. Pour tous réels  $a$  et  $a + h$  de l'intervalle  $I$ , avec  $h \neq 0$  on a :

$$\frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

ce qui tend vers  $u'(a) + v'(a)$  quand  $h \rightarrow 0$

3. Pour tous réels  $a$  et  $a + h$  de l'intervalle  $I$ , avec  $h \neq 0$  on a :

$$\frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a) - v(a)u(a+h)}{h}$$

ce qui tend vers  $u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$  lorsque  $h \rightarrow 0$

4. Seul le cas  $n = 2$  est au programme de 1S. En effet sa démonstration dans le cas où  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3 et beaucoup moins facile où on utilise des arguments que nous n'avons pas encore abordés...

Pour  $n = 2$ , donc si  $f = u^2 = u \times u$ , on applique la formule pour la dérivée du produit et on obtient (donc en prenant  $v = u$ ) :

$$f' = u'u + uu' = 2uu'$$

Pour  $n = 3$ , donc lorsque  $f = u^3 = u^2 \times u$ , on applique le résultat précédent et la formule du produit (en prenant cette fois  $v = u^2$ ) et on obtient :

$$f' = u'u^2 + u \times 2uu' = u^2u' + 2u^2u' = 3u^2u'$$

On procéderait de même pour le cas  $n = 4$ , puis pour le cas  $n = 5$ , ... Cette technique ne permet néanmoins pas de généraliser dans le cas où  $n$  est quelconque, c'est pourquoi on utilisera en terminale S un nouveau type de raisonnement (le raisonnement par récurrence), pour généraliser ce type de propriété!!


5. Pour tous réels  $a$  et  $a + h$  de l'intervalle  $I$ , avec  $h \neq 0$  on a :

$$\frac{\frac{1}{v}(a+h) - \frac{1}{v}(a)}{h} = \frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = \frac{1}{hv(a+h)} - \frac{1}{hv(a)} = \frac{v(a) - v(a+h)}{h \times v(a+h)v(a)} = -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a+h)v(a)}$$

ce qui tend vers  $-\frac{v'(a)}{v^2(a)}$

6. On déduit  $\left(\frac{u}{v}\right)'$  de la formule précédente et de celle du produit, pour obtenir :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

 **Exercice 2.7 :**

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

4.  $i(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$

6.  $k(x) = \frac{1}{4x+1}$

2.  $g(x) = \frac{5x^2 - x}{2}$

7.  $f(x) = 4x^2\sqrt{x}$


3.  $h(x) = \frac{2}{x} + x$

5.  $j(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)(x + \sqrt{x})$

8.  $f(x) = \sqrt{2-x}$

**2.2.3 Dérivée des fonctions de la forme  $f(x) = g(ax + b)$**

On admettra le résultat suivant :  $f'(x) = ag'(ax + b)$

 **Exemple :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[\frac{1}{3}; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{3x-1}$  On remarque que  $f$  peut s'écrire  $f(x) = g(3x-1)$  où  $g(t) = \sqrt{t}$

Or, pour tout  $t > 0$ , on a :  $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$  donc  $f'(x) = ag'(ax + b) = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$  pour  $x > \frac{1}{3}$

**2.2.4 Dérivée des fonctions de la forme  $f(x) = g \circ h(x)$**

On admettra le résultat suivant :

$$f'(x) = g(h(x)) \times h'(x)$$

 **Exemple :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

On remarque que  $f$  peut s'écrire  $f(x) = g(h(x))$  où  $g(x) = \sqrt{x}$  et  $h(x) = x^2 + 1$ , par conséquent :

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

**Remarque :** Le résultat du paragraphe précédent est une application directe de celui ci-dessus avec  $h(x) = ax + b$ , ce dernier n'est en réalité au programme de 1S que pour  $h(x) = ax + b$ , comme dans le paragraphe précédent.

### 3 Applications

#### 3.1 Signe de la dérivée et variation



#### Théorème 2 :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$

1.  $f$  est croissante sur  $I$  si, et seulement si pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \geq 0$
2.  $f$  est constante sur  $I$  si, et seulement si pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) = 0$
3.  $f$  est décroissante sur  $I$  si, et seulement si pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \leq 0$



#### Preuve

$\Rightarrow$ ) Soit  $x$  un réel de  $I$  et  $h$  un réel non nul tels que  $x + h \in I$ .

1. – Si  $h > 0$ , alors  $x + h \geq x$  et comme  $f$  est croissante sur  $I$ ,  $f(x + h) \geq f(x) \iff f(x + h) - f(x) \geq 0$
- Si  $h < 0$ , alors  $x + h \leq x$  et comme  $f$  est croissante sur  $I$ ,  $f(x + h) \leq f(x) \iff f(x + h) - f(x) \leq 0$


Dans tous les cas,  $f(x + h) - f(x)$  et  $h$  sont de mêmes signes, donc :

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$

$f$  est dérivable en  $x$  donc  $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$  a une limite réel  $f'(x)$  lorsque  $h$  tend vers 0

Si l'on donne à  $h$  des valeurs proches de 0, alors  $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$  prend des valeurs positives, on admet ici que sa limite en 0 est aussi positive, i.e que  $f'(x) \geq 0$

2.  $f$  est constante sur  $I$ , donc  $f(x + h) = f(x)$  et  $\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 0$ , par conséquent  $f'(x) = 0$
3. De façon analogue à la première partie, on démontre cette fois que  $f(x + h) - f(x)$  et  $h$  sont de signes contraires. Ainsi  $\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq 0$  Si l'on donne à  $h$  des valeurs proches de 0, alors  $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$  prend des valeurs négatives, on admet ici que sa limite en 0 est aussi négative, i.e que  $f'(x) \leq 0$

 **Preuve (Suite)**

Hors Programme

⇐) 1. On suppose ici que  $f'(a) \geq 0$  pour tout  $a \in I$ , montrons que la fonction  $f$  est croissante sur  $I$  :

Soit  $a \in I$ , par définition  $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varphi(h)$  avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$ .

– Si  $h > 0$ , alors  $a+h \geq a$  et on veut montrer que  $f(a+h) - f(a) > 0$ , pour  $h$  suffisamment petit. Or :

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + h\varphi(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

$f'(a)h \geq 0$  et comme  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$ , il existe un nombre  $H$  tel que pour  $h < H$ ,  $f'(a)h + h\varphi(h) \geq 0$ , ce qui montre que pour  $h < H$ ,  $f(a+h) > f(a)$


– Si  $h < 0$ , alors  $a+h \leq a$  et on veut montrer que  $f(a+h) - f(a) < 0$ , pour  $h$  suffisamment petit. Or :

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + h\varphi(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

$f'(a)h \leq 0$  et comme  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$ , il existe un nombre  $H$  tel que pour  $h < H$ ,  $f'(a)h + h\varphi(h) \leq 0$ , ce qui montre que pour  $h < H$ ,  $f(a+h) < f(a)$


Par conséquent comme ce qu'on vient de faire est vraie pour tout  $a \in I$  la fonction  $f$  est croissante sur  $I$ . (La démonstration n'est pas au programme de 1S, car on utilise la définition formelle des limites qui n'est pas au programme ...)

Pour les autres cas on procède de même

 **Exercice 3.8** :

$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -2x^2 + x + 1$

1. Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation sur  $\mathbb{R}$
2. Dans un repère, tracer la représentation graphique  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$

 **Exercice 3.9** :

$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{2\}$  par  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

1. Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation
2. A l'aide de la calculatrice, vérifier la cohérence avec le tableau de variation

### 3.2 Extremum local



#### Définition 4 :

On considère une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  un réel de  $I$ .

1.  $f(a)$  est un maximum local (resp. minimum local) de  $f$  si et seulement si  $f(x) \leq f(a)$  (resp.  $f(x) \geq f(a)$ ) pour tout  $x \in J$  où  $J$  est un intervalle **ouvert** inclus dans  $I$  et contenant  $a$
2.  $f(a)$  est un extremum local si et seulement si  $f(a)$  est un maximum local ou un minimum local.

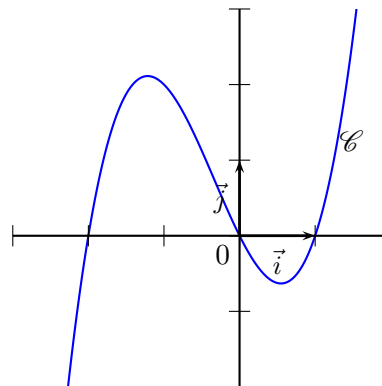


#### Exemple :

Ci-contre  $\mathcal{C}$  la représentation graphique d'une fonction définie sur  $[-3; 2]$ .

On constate que  $2,1$  est un extremum local car pour tout  $x \in [-2; 0]$  on a  $f(x) \leq 2,1 = f(-1, 2)$

De même,  $f(0, 6) = -0,6$  est un minimum local car pour tout  $x \in [0; 1]$  on a  $f(x) \geq -0,6$



#### Propriété 4 :

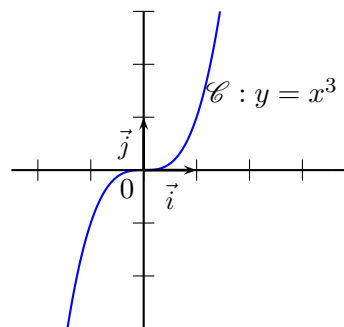
On considère une fonction  $f$  dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a$  est un réel de  $I$ .

Si  $f(a)$  est un extremum local de  $f$ , alors  $f'(a) = 0$

**Remarque :** La réciproque de ce théorème est fausse.

Considérons par exemple le cas de la fonction cube, dont la dérivée s'annule en 0 qui n'est pourtant pas un extremum local.

Il faut ajouter une hypothèse pour avoir le résultat réciproque, comme suit :

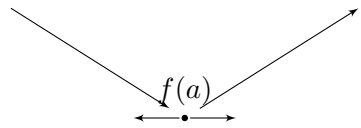


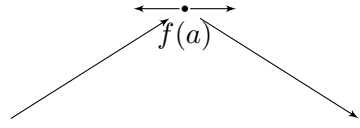
#### Propriété 5 :

On considère une fonction  $f$  dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a$  un réel de  $I$ .

Si  $f'$  s'annule en  $a$  **en changeant de signe**, alors  $f(a)$  est un extremum local.

**Remarque :** Nous admettrons ces deux propriétés.

$x$	$a$
$f'(x)$	-    0    + ⋮
$f$	

$x$	$a$
$f'(x)$	+    0    - ⋮
$f$	

**Exercice 3.10 :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ . Quels sont les extremums locaux de  $f$  ?

**Exercice 3.11 :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 4x + 5$

1. Dresser le tableau de variation de  $f$
2. Démontrer que 10 est un majorant de  $f$  sur  $] -\infty; 0]$
3. Démontrer que pour tout réel  $x \in \left[ -\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3} \right]$ ,  $0 \leq f(x) \leq 10$

« *La physique est bien trop dure pour les phycisiens* »

DAVID HILBERT, mathématicien