Chapitre 4 : Trigonométrie, angles et repérage

D. Zancanaro C. Aupérin

2009-2010

"Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous" Thurston Moore

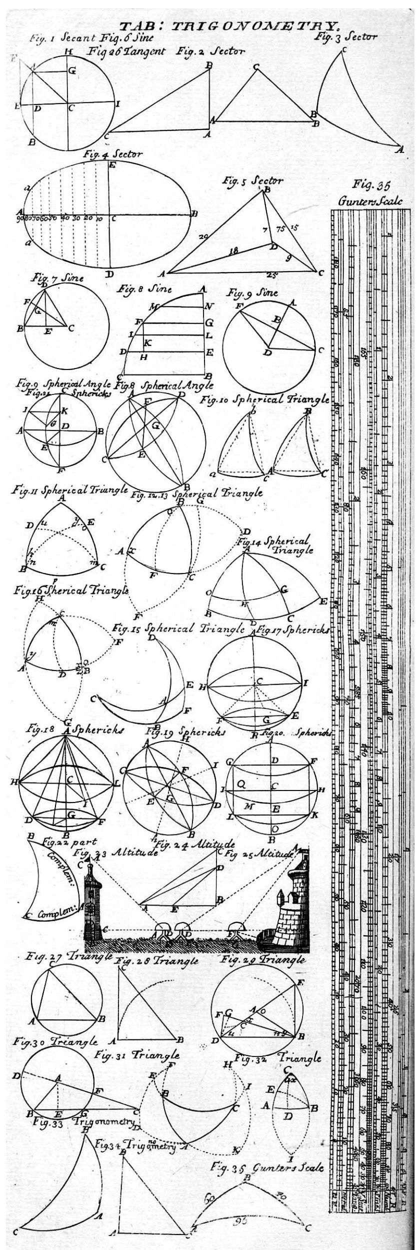
Dernière modification : 28 novembre 2009

Table des matières

Cours : Trigonométries, angles et repérages

1 Introduction

Les origines de la trigonométrie remontent aux civilisations d'Égypte antique, de Mésopotamie et de la vallée de l'Indus, il y a plus de 4000 ans. Il semblerait que les Babyloniens aient basé la trigonométrie sur un système numérique à base 60. Lagadha (-1350 ; -1200) est le premier mathématicien à utiliser la géométrie et la trigonométrie pour l'astronomie. La plupart de ses travaux sont aujourd'hui détruits. La première utilisation de sinus apparaît dans les sulba Sutras en Inde, entre 800 et 500 avant J.C., où le sinus de $\dfrac{\pi}{4}$ est correctement calculé comme $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ dans un problème de construction d'un cercle de même aire qu'un carré donné (le contraire de la quadrature du cercle).

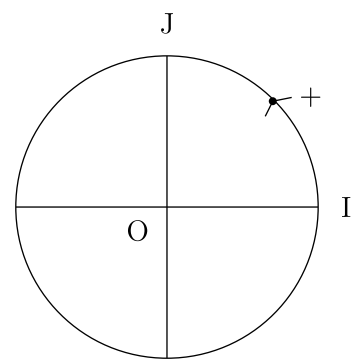


Lorsque qu'on cherche une rue sur un plan de ville, on repère le rectangle où se trouve cette rue grâce à une lettre qui définit une colonne et un nombre qui définit une ligne du quadrillage sur le plan. Les marins ou les géographes repèrent un point sur la Terre grâce à sa longitude et sa latitude. Les astronomes ont besoin, eux, de trois mesures pour repérer un objet spatial, par exemple deux angles définissant une direction et une distance caractérisant l'éloignement de l'objet sur la direction. Le repérage est donc indispensable dès lors qu'on cherche à définir la position d'un objet dans un espace. Les repères que nous avons utilisé jusqu'à présent sont dit cartésiens, adjectif créé en hommage à Descartes (1596 - 1650) mathématicien et philosophe français qui inventa en même temps que Fermat (1601 - 1665) mais indépendamment de lui, le système de coordonnées que nous utilisons couramment. Les repères cartésiens utilisés jusqu'à présent permettent de positionner des points dans un plan. Ils peuvent être complétés par une troisième coordonnée permettant de se repérer dans l'espace à trois dimensions. Ces repères ne sont pourtant pas les seuls permettant de positionner des objets, nous allons découvrir dans ce chapitre comment se repérer sur un plan avec un angle et un rayon : grâce aux coordonnées polaires.

2 Mesure d'un angle en radian

2.1 Le cercle trigonométrique

Définition 1. Un cercle de rayon 1, orienté, sur lequel est fixé un point « d'origine I »est appelé cercle trigonométrique.



Considérons un cercle trigonométrique de centre O et I, J deux points de ce cercle tels que $(OI) \perp (IJ)$. On définit alors un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

2.2 Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique

Il y a trois manières de repérer un point M sur un cercle :
- Par ses coordonnées dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
- Par la mesure de l'angle orienté $\widehat{IOM}$
- Par la mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{IM}$

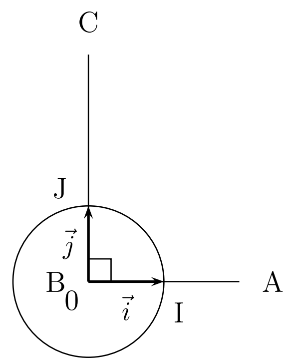
Remarque : Nous allons établir un lien entre ces trois manières de repérer un point sur le cercle trigonométrique.

2.3 Les angles en radian

2.3.1 Principe

On considère un repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j})$

Principe : Plutôt que d'utiliser une unité de mesure d'angle arbitraire, le degré, on essaye de construire une unité de mesure des angles qui dépend de l'unité de longueur du repère choisit.
Considérons un angle $\widehat{ABC} = 90^{\circ}$, on construit alors le cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon 1, puis on associe le repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j})$ comme suit :



La mesure de l'arc $\widehat{IJ}$, dans le repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j})$ est alors identique, quelque soit l'angle droit choisit au départ. De plus la longueur de cet arc, est égale au quart du périmètre du cercle $\mathscr{C}$, i.e elle vaut

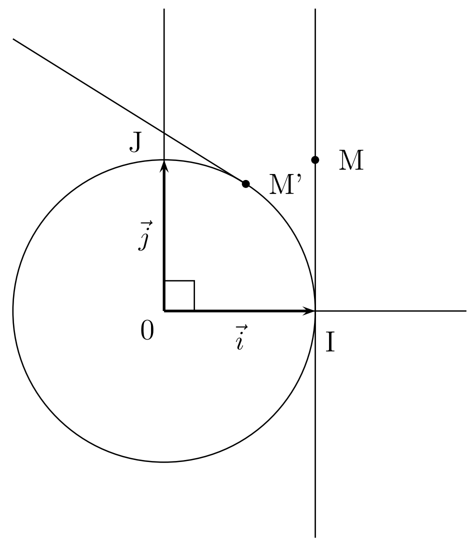
$$\frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

On dira que l'angle $\widehat{ABC}$ mesure $\frac{\pi}{2}$ radians et on notera $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$ rad.
En orientant le cercle $\mathscr{C}$, on peut alors effectuer la distinction suivante :

$$\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2} \text{ rad et } \widehat{CBA} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

2.3.2 Enroulement de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique

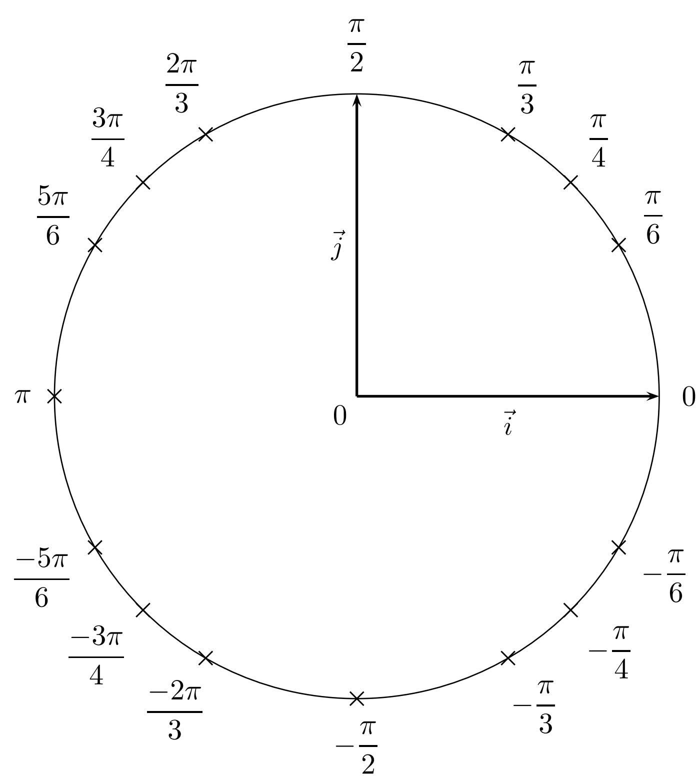
Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ on considère le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1. Sur ce cercle le sens direct ou positif est contraire au sens des aiguilles d'une montre et le sens indirect ou négatif suit le sens de rotation des aiguilles d'une montre.
Afin d'exploiter l'idée exposée dans le paragraphe précédent nous avons ajouté *à* notre figure une droite graduée d d'origine I parallèle *à* $(O;\vec{j})$ et de même unité que le repère.
La droite d représente l'ensemble des nombres réels, à chaque réel x correspond sur d le point M d'abscisse x sur la droite d. En « enroulant »d sur le cercle trigonométrique *à* chaque point de d va correspondre un unique point sur le cercle trigonométrique.
Ainsi le point M d'absisse 1 sur la droite d se retrouve sur le point M' du cercle $\mathscr{C}$. 1 est alors une mesure de l'angle orienté $\widehat{IM'}$ et donc l'angle orienté $\widehat{IOM'} = 1$ rad



Remarque : Le point d'abscisse $1+2\pi$ de la droite d se retrouve aussi sur le point M', c'est aussi le cas du point d'abscisse $1-2\pi$ ou encore $1+4\pi$ et plus généralement de tous les points d'abscisse $1+2k\pi$ o*ù* $k \in \mathbb{R}$. Autrement dit la mesure de l'angle orienté $\widehat{IOM'}$ vaut :

$$\widehat{IOM'} = 1 \text{ rad} = 1+2\pi \text{ rad} = 1-2\pi \text{ rad} = 1+2k\pi \text{ rad o\`u } k \in \mathbb{R}$$

Un angle en radian admet une infinité de mesure mais une seul qui appartient *à* l'intervalle $]-\pi;\pi]$, on dit qu'il s'agit de la mesure principale d'un angle en radian Ci-dessous, quelques mesures principales d'angles en radians sur le cercle trigonométrique :



Propriété 1. Les mesures d'angles en degrés et en radians sont proportionnelles, on rappelle le tableau suivant :

mesure en degrés	O	30	45	60	90	180	270	360
mesure en radians	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	$\frac{3\pi}{2}rad$	2π

Exemple : Considérons le point A sur le cercle trigonométrique associé au réel $x = \frac{7\pi}{4}$. En plaçant A sur le cercle on peut facilement trouver la mesure principale de l'angle en radian : ici, $\frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$

Exercice 2.1. Les réels $\frac{7\pi}{5}$ et $-\frac{13\pi}{5}$ sont-ils des mesures d'un même angle orienté en radians ?

3 Les angles de vecteurs non nuls

3.1 Définition

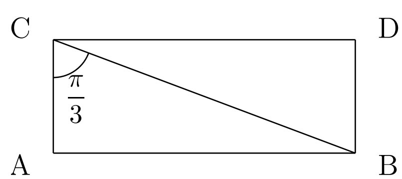
Définition 2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$
Les mesures en radians de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ sont les mesures en radians de l'angle orienté $\widehat{AOB}$

Remarque : Désormais nous distinguerons angle géométrique et angle orienté ; un angle géométrique est toujours **positif**. Ce n'est pas le cas d'un angle orienté, qui peut être négatif et dont le signe dépend de l'orientation choisie.

Exemple : Si l'orientation choisie est le sens trigonométrique on a :

Angle géométrique :

$\widehat{ACB} = \widehat{BCA} = \frac{\pi}{3}$



Angle orienté : (angle entre 2 vecteurs)

$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{3}$; $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$ (mesures principales)

Remarque : Un angle a une infinité de mesures. Sur la figure ci-dessus on aurait pu écrire :

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{5\pi}{3} \qquad (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{7\pi}{3}$$

Toutes les mesures s'obtiennent en ajoutant $2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. On note alors :

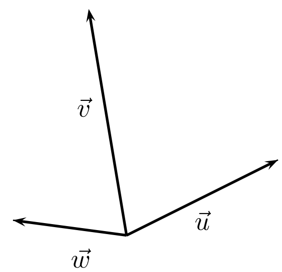
$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{3}(2\pi) \qquad (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}(2\pi)$$

3.2 Propriétés

Propriété 2. *Relation de Chasles (admise) :*
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls. On a :

$$(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w})(2\pi)$$

Illustration :



Exercice 3.1. Sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O, munie du repère orthonormée $(0, I, J)$, les points A et B sont tels que :

$$\widehat{IOA} = 45^\circ \qquad \text{et } \widehat{IOB} = -120^\circ$$

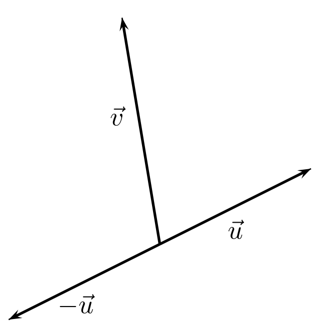
Donner une mesure en radians des angles orientés :

1. $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$
2. $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})$
3. $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$

Corollaire 1. Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout $k \neq 0$ on a :

1. $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})(2\pi)$
2. $(-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) + \pi(2\pi)$
3. $(k\overrightarrow{u},k\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})(2\pi)$
4. $(-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})(2\pi)$

Illustration :



Démonstration :

1. D'après la relation de Chasles on a :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{u})(2\pi)$$

Or $(\vec{u}, \vec{u})(2\pi) = 0(2\pi)$ d'où : $\quad (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = 0(2\pi)$, et finalement :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})(2\pi)$$

2. D'après la relation de Chasles on a :

$$(-\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = (-\vec{u}, \vec{u})(2\pi)$$

Or $(-\vec{u}, \vec{u})(2\pi) = \pi(2\pi)$ d'où : $\quad (-\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = \pi(2\pi)$, et finalement :

$$(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \pi(2\pi)$$

3. En utilisant deux fois la relation de Chasles on a :

$$(k\vec{u}, k\vec{v}) = (k\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}; k\vec{v})(2\pi)$$

<u>Cas 1</u> : $k > 0$
Dans ce cas, les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens et donc : $(k\vec{u}, \vec{u}) = 0(2\pi)$. De même $(\vec{v}; k\vec{v}) = 0(2/pi)$, et donc :

$$(k\vec{u}, k\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})(2\pi)$$

<u>Cas 2</u> : $k < 0$
Dans ce cas, les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ n'ont pas le même sens et donc : $(k\vec{u}, \vec{u}) = \pi(2\pi)$. De même $(\vec{v}; k\vec{v}) = \pi(2/pi)$, et donc :

$$(k\vec{u}, k\vec{v}) = 2\pi + (\vec{u}, \vec{v})(2\pi)$$

ce qui donne :

$$(k\vec{u}, k\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})(2\pi)$$

4. On applique la propriété précédente pour $k = -1$

<u>Exercice</u> 3.2. ABC est un triangle de sens direct. Démontrer que la somme de ses angles orientés est égales à π
Notons

$$\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

Comme $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA})(2\pi)$, on peut écrire :

$$\theta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})(2\pi)$$

i.e :

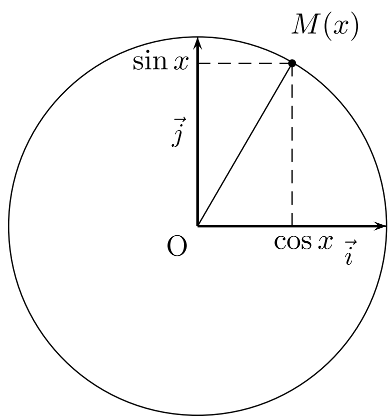
$$\theta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB})(2\pi) = \pi(2\pi)$$

4 La trigonométrie

4.1 Définition du cosinus, sinus et de la tangente

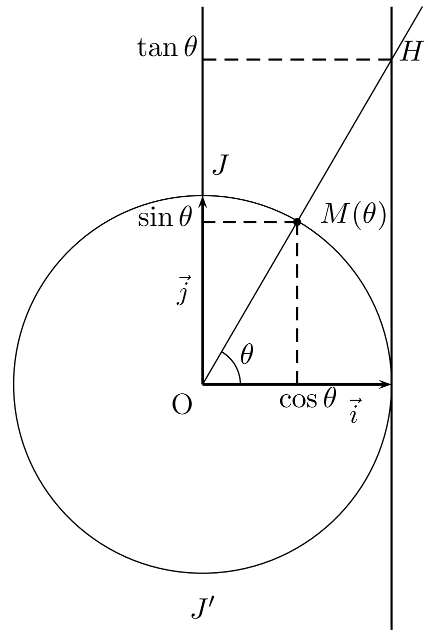
4.1.1 Définition du cosinus et sinus d'un nombre réel

<u>Définition</u> 3. Soit x un nombre réel et M son point associé sur un cercle trigonométrique muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
On appelle cosinus de x, noté $cos(x)$, l'abscisse du point M dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
On appelle sinus de x, noté $sin(x)$, l'ordonnée du point M dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



4.1.2 Définition de la tangente d'un nombre réel

Soit Δ la droite (verticale) d'équation $x = 1$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et H le point défini par $H = (OM) \cap \Delta$
Ce point H existe dès lors que Δ et (OM) ne sont pas parallèles, i.e M n'est ni en J ni en J', autrement dit dès que $\theta \neq \frac{\pi}{2}(\pi)$.



<u>Définition</u> 4. On appelle tangente de θ, noté $\tan\theta$, l'ordonnée du point H dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

Propriété 3. Si $\cos\theta \neq 0$ on a : $$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

<u>Démonstration</u> :

On applique le théorème de Thales et on obtient directement :

$$\frac{\sin\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{1} \iff \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

<u>Exercice</u> 4.1. On donne $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$

1. Soit $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Démontrer que : $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{\tan x}$
2. En déduire que $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2+\sqrt{3}$

4.1.3 Définition du cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté

Si $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta$ alors on a :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos\theta$$

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \sin\theta$$

$$\tan(\vec{u}, \vec{v}) = \tan\theta \text{ si } \theta \neq \frac{\pi}{2}(\pi)$$

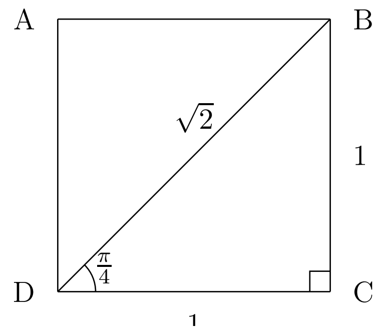
4.2 Cosinus, sinus et tangente d'un angle remarquable

Le tableau ci-dessous rappelle les valeurs remarquables du cosinus, du sinus et de la tangente pour des valeurs particulières de l'angle θ (en radians) :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n'existe pas	0

Démonstration :

Pour calculer les valeurs de $\sin\dfrac{\pi}{4}$ et de $\cos\dfrac{\pi}{4}$ on exploite la diagonale d'un carré de côté 1



Dans le triangle DCB rectangle en C, il vient :

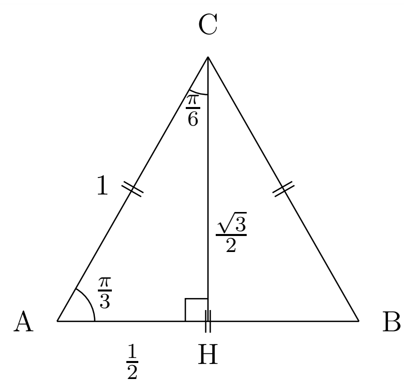
$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{BC}{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{DC}{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De plus $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Pour calculer les valeurs du sinus, du cosinus de $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{6}$ on exploite naturellement la configuration du triangle équilatéral de côté 1 avec un de ses hauteurs qui au passage, d'après le théorème de Pythagore mesure :

$$\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

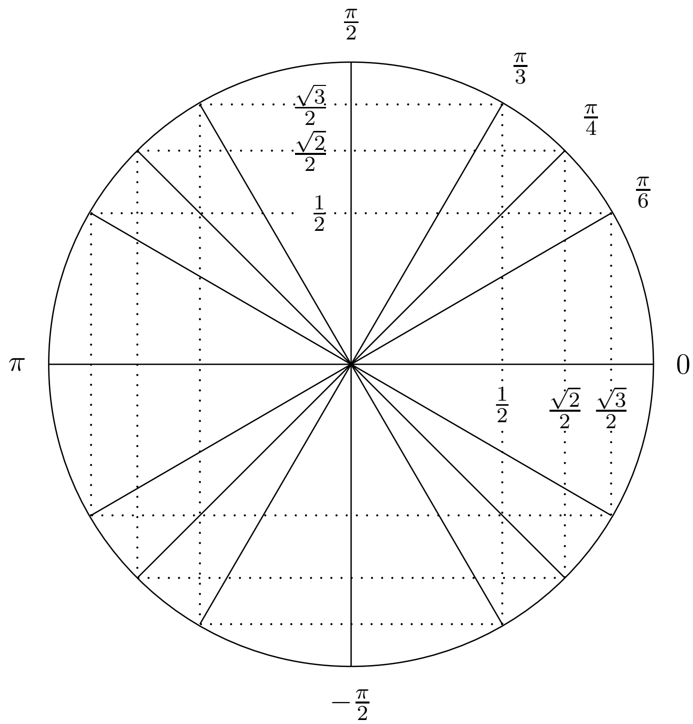


Dans le triangle AHC rectangle en H on a :

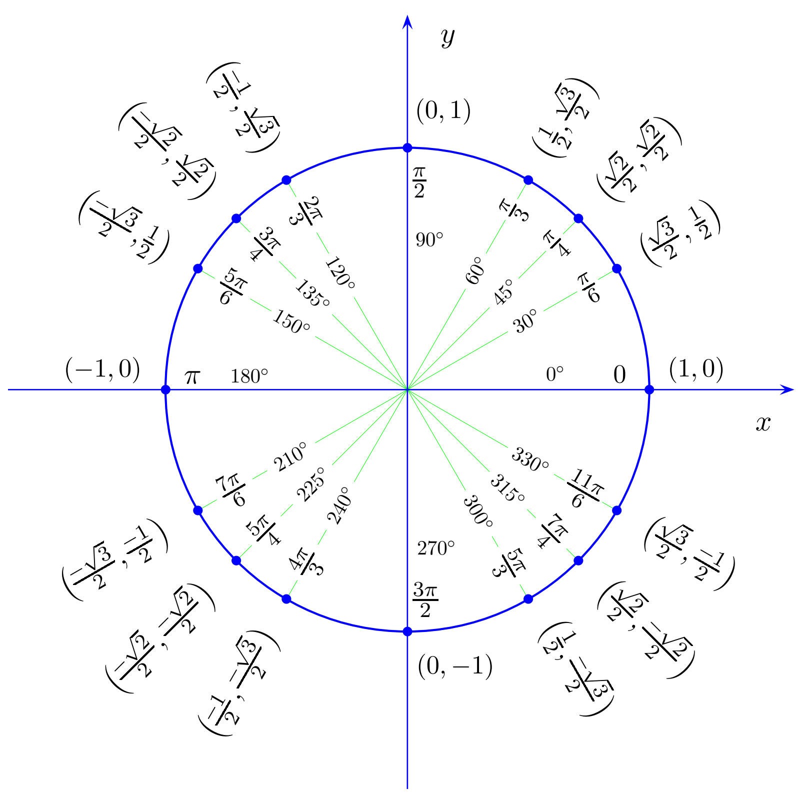
$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{AH}{CH} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \frac{CH}{AH} = \sqrt{3}$$

Pour les autres cas d'angles remarquables, on retrouve les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente en utilisant le cercle trigonométrique par symétrie comme l'indique la figure suivante :



Un cercle trigonométrique qui résume l'essentiel :



4.3 Relations trigonométriques

Propriété 4. élémentaires du sinus et du cosinus :

1. Pour tout réel x on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (Pythagore)
2. Pour tout réel x on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
3. Pour tout réel x on a $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ où $k \in \mathbb{Z}$

Démonstration :

Évident

Exercice 4.2. Sachant que $\cos \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
Calculer $\sin \dfrac{\pi}{12}$, puis montrer que $\sin \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (1)

Propriété 5. $\forall \theta \in \mathbb{R}$ on a :

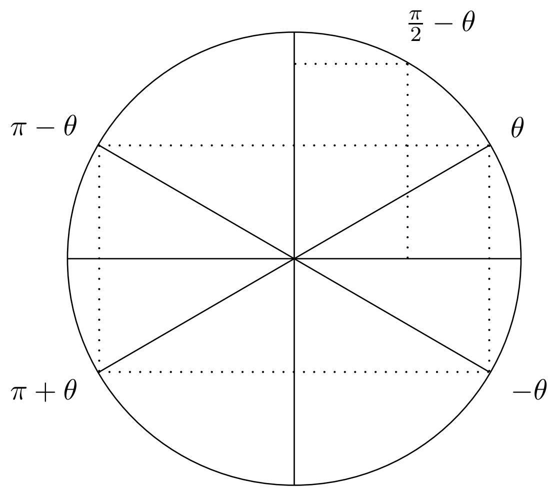
1. $\cos\theta = \cos(-\theta)$
2. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
3. $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
4. $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
5. $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$
6. $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$
7. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$
8. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$
9. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$
10. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$

Démonstration :

---

1. On montrera que $2 - \sqrt{3} = \dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{2}$

On obtient cette propriété par une lecture astucieuse du cercle trigonométrique :



Exercice 4.3. Simplifier les expressions suivantes : $\cos(-\pi - \theta)$, $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\cos^2(-x) + \sin^2(\pi - x)$

Exercice 4.4. Exprimer à l'aide de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ les expressions suivantes :

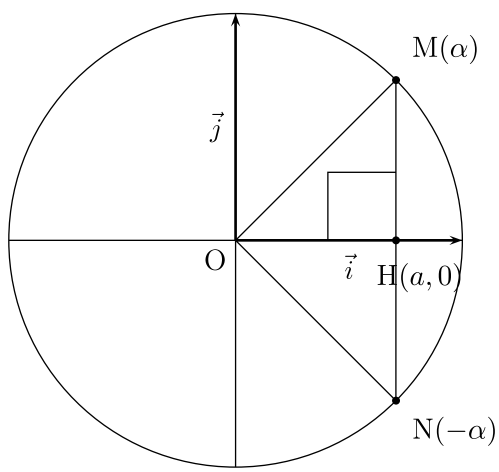
- $A = \cos(x + \pi) - \cos(-x) + 5\cos(x)$
- $B = \sin(\pi - x) + 2\sin(x + 2\pi) + \sin(x + 3\pi)$
- $C = \sin(\pi + x)cos(\pi - x) - \sin(\pi - x)\cos(\pi + x)$
- $D = \sin(x + 11\pi) + \sin(11\pi - x) - \cos(11\pi - x)$

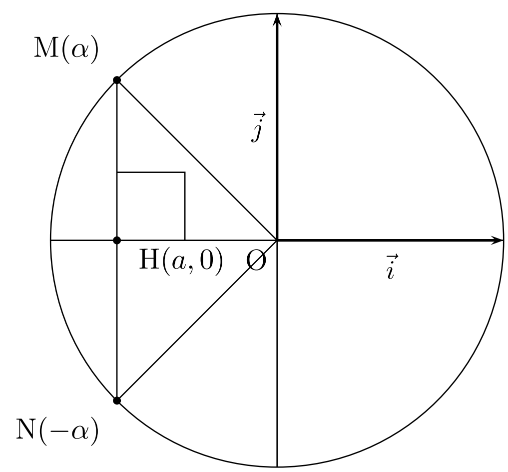
4.4 Équations trigonométriques

4.4.1 Résolution de l'équation $\cos x = a$, $a \in \mathbb{R}$

Distinguons plusieurs cas :

- Si $\mid a \mid > 1$, l'équation n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \cos x \leq 1$
- Si $\mid a \mid < 1$, la perpendiculaire à $(O, \vec{i})$ passant par $H(a;0)$ coupe le cercle trigonométrique en deux points ; il existe donc deux points M et N du cercle trigonométrique ayant pour absisse a. L'équation $\cos x = a$ admet donc deux solutions dans $]-\pi;\pi]$, α et donc $-\alpha$ où $\alpha \in [0;\pi]$, les solutions dans $\mathbb{R}$ sécrivent alors $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.





- Si $a = 1$ les points M et N définis précédemment sont confondus et ont pour absisses 1. L'équation $\cos x = a$ admet donc une unique solution dans $]-\pi;\pi]$: $x = 0$. Dans $\mathbb{R}$ les solutions s'écrivent $2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- Si $a = -1$ les points M et N définis précédemment sont confondus et ont pour absisses -1. L'équation $\cos x = a$ admet donc une unique solution dans $]-\pi;\pi]$: $x = \pi$. Dans $\mathbb{R}$ les solutions s'écrivent $\pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

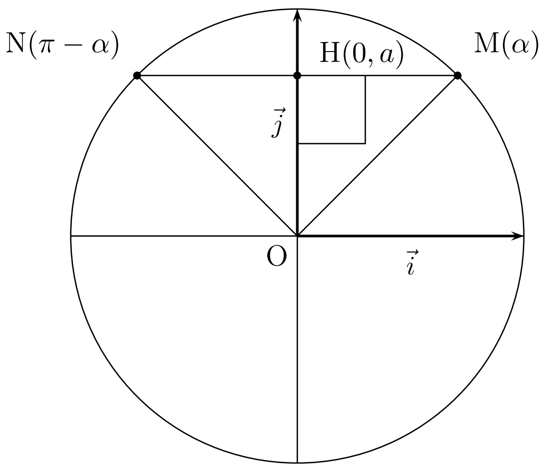
Propriété 6. *Synthèse*
Soit x et y deux réels alors :

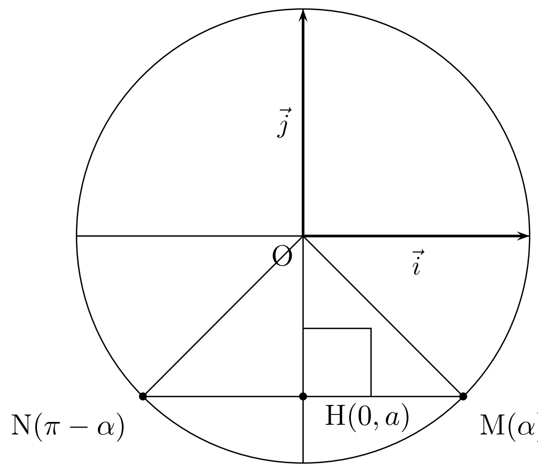
$$\cos x = \cos y \Longleftrightarrow x = \pm y + 2k\pi \qquad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

4.4.2 Résolution de l'équation $\sin x = a$, $a \in \mathbb{R}$

Distinguons plusieurs cas :

- Si $| a | > 1$, l'équation n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \sin x \leq 1$
- Si $| a | < 1$, la perpendiculaire à $(O, \vec{j})$ passant par $H(0;a)$ coupe le cercle trigonométrique en deux points ; il existe donc deux points M et N du cercle trigonométrique ayant pour ordonnée a. L'équation $\sin x = a$ admet donc deux solutions dans $]-\pi;\pi]$, α et $\pi - \alpha$ où $\alpha \in]-\pi;\pi]$ [2], les solutions dans $\mathbb{R}$ sécrivent alors $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.





- Si $a = 1$ les points M et N définis précédemment sont confondus et ont pour ordonnées 1. L'équation $\sin x = a$ admet donc une unique solution dans $]-\pi;\pi]$: $x = \dfrac{\pi}{2}$. Dans $\mathbb{R}$ les solutions s'écrivent $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- Si $a = -1$ les points M et N définis précédemment sont confondus et ont pour ordonnée -1. L'équation $\sin x = a$ admet donc une unique solution dans $]-\pi;\pi]$: $x = -\dfrac{\pi}{2}$. Dans $\mathbb{R}$ les solutions s'écrivent $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Propriété 7. *Synthèse*
Soit x et y deux réels alors :

$$\sin x = \sin y \iff x = y + 2k\pi \qquad \text{ou } x = \pi - y + 2k\pi \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Exemple : Résoudre $\sin(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $\cos(x) = \sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

2. Attention : une solution est α, l'autre est la mesure principale de $\pi - \alpha$ qui peut être éventuellement différente de $\pi - \alpha$

Exercice 4.5. À l'aide d'une figure, résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x \in [0; 2\pi[$
2. $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x \in [-\pi; \pi[$
3. $\cos(x) \geq \dfrac{1}{2}$ pour $x \in [-\pi; \pi[$
4. $\sin(x) < \dfrac{1}{2}$ pour $x \in [0; 2\pi[$

Exercice 4.6. On considère l'équation $(E) : \sin x = \cos \dfrac{\pi}{3}$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)
2. Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation (E)

5 Repérage d'un point du plan

5.1 Repérage cartésien

Définition 5. Un repère cartésien du plan est constitué d'un point O appelé origine et deux deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires. On le note $(O; \vec{i}, \vec{j})$
– Les coordonnées d'un point M du plan sont l'unique couple $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$
– Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ du plan sont l'unique couple $(x; y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

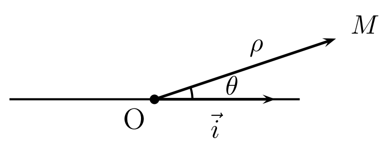
Remarque : Les droites $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ sont appelés les axes du repère. Si les axes sont perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal. Si de plus, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de mêmes normes, on dit que le repère est orthonormal ou orthonormée

Propriété 8. Soit $A(x_a; y_a)$ et $B(x_b; y_b)$ deux points du plan. On a alors :

1. $\overrightarrow{AB}(x_b - x_a; y_b - y_a)$
2. Si le repère est orthonormée $AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

5.2 Repérage polaire

Définition 6. Pour se repérer dans le plan avec des coordonnées polaires on a besoin d'un point O et d'un vecteur unitaire $\vec{i}$. Ce couple $(O;\vec{i})$ est appelé repère polaire du plan. O est le pôle et la demi-droite $[O;\vec{i})$ l'axe polaire.
Soit M un point distinct du point O.
Tout couple (ρ, θ) avec $\rho > 0$ tel que $OM = \rho$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ est un couple de coordonnées polaires.



Remarque :

- Le principe des coordonnées polaires donc à donner un « cap » : l'angle formé avec le vecteur $\vec{i}$ et une distance appelé aussi rayon.
- Les coordonnées polaires ne sont pas uniques. Par exemple $(2;0)$ et $(2;2\pi)$ repère le même point. En revanche, en imposant à θ d'être dans $]-\pi;\pi]$, les coordonnées polaires sont alors uniques
- Le repérage en coordonnées polaires permet de donner l'équation de certaines lignes très facilement. Par exemple $\rho = 3$ est l'équation du cercle de centre O et de rayon 3. Par contre l'équation caractérisant une parabole est plus difficile à donner ...

5.3 Changement de type de repérage

On considère une repère cartésien $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormé et le repère polaire $(O;\vec{i})$. Soit M un point du plan, on note $(x;y)$ ses coordonnées dans le repère cartésien et $(\rho;\theta)$ ses coordonnées dans le repère polaire.

Propriété 9. *Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires :*

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

θ est alors une mesure de l'angle tel que $\cos\theta = \dfrac{x}{\rho}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{\rho}$

Propriété 10. *Passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes :*

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta$$

Démonstration :

> $\rho = OM = \sqrt{x^2+y^2}$. $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O. La demi-droite $[OM)$ coupe $\mathscr{C}$ en N.
> Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires et de même sens donc
>
> $$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \theta$$
>
> Le point N, image du réel θ sur le cercle $\mathscr{C}$, a pour coordonnées $(\cos\theta; \sin\theta)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Or $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{ON}$ donc les coordonnées de M sont $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, c'est-à-dire $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$

<u>Exercice</u> 5.1. Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan. Soit $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ et $B(-5; 5)$dans ce repère. Soit $C\left(2; \dfrac{2\pi}{3}\right)$ dans le repère polaire $(O; \vec{i})$

1. Déterminer les coordonnées polaires de A et B
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes de C