Fiche résumé : Les suites

Une suite **arithmétique** est une suite de nombres telle que chacun de ses termes s'obtient en ajoutant au précédent un même nombre (**raison**).
Autrement dit, une suite u de premier terme u_0 et de raison r est **arithmétique** si et seulement si, pour tout entier n, on a $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$

Exemple : Léa dépose 100 € sur son compte. Tous les ans il ajoute 10 € . Si on note u_n l'argent disponible sur le compte de Léa au bout de la $n^{\text{ième}}$ année. On a :

$$\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = u_n + 10 \end{cases}$$

u est donc une suite arithmétique de raison 10 et de premier terme 100.

Une suite **géométrique** est une suite de nombres telle que chacun de ses termes s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre (**raison**).
Autrement dit, une suite u de premier terme u_0 et de raison q est **géométrique** si et seulement si, pour tout entier n, on a $\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$

Exemple : Max dépose 100 € sur son compte. Tous les ans il gagne 3% de plus. Si on note v_n l'argent disponible sur le compte de Léa au bout de la n^{ime} année, on a :

$$\begin{cases} v_0 = 100 \\ v_{n+1} = v_n \times 1,03 \end{cases}$$

v est donc une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme 100.

Propriété :

- **Relation entre u_n et u_0 :** Pour tout n, on a $\boxed{u_n = u_0 + nr}$
- **Relation entre u_n et u_1 :** Pour tous n, on a $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$

Exemple : Au bout de 20 ans, Léa dispose de 300 € sur son compte. En effet $u_n = 100 + 10n$ et donc : $u_{20} = 100 + 10 \times 20 = 300$

Propriété :

- **Relation entre u_n et u_0 :** Pour tout n, on a $\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$
- **Relation entre u_n et u_1 :** Pour tous n, on a $\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$

Exemple : Au bout de 20 ans, Max dispose de 180, 61 € sur son compte. En effet $v_n = 100 \times 1,03^n$ et donc : $v_{20} = 100 \times 1,03^20 = 180,61$

Théorème : La somme S de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$$\boxed{S = \text{nb termes} \times \frac{1^{er} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}}$$

Exemple :

$$u_{10} + u_{11} + ... + u_{20} = 11 \times \frac{u_{10} + u_{20}}{2} = 2200$$

Théorème : La somme S de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q est :

$$\boxed{S = 1^{er} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb termes}}}{1 - q}}$$

Exemple :

$$v_1 + v_2 + ... + v_{20} = v_1 \times \frac{1 - 1,03^{20}}{1 - 1,03} = 2767,65$$

Enfin, un petit plus uniquement pour les T-STG-M

THÉORÈME 1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$

- Si $q > 1$ alors u est $\nearrow$ et $\underset{n \to +\infty}{lim} u_n = +\infty$
- Si $0 < q < 1$ alors u est $\searrow$ et $\underset{n \to +\infty}{lim} q_n = 0$

Exemple : La suite v est strictement croissante et $\underset{n \to +\infty}{lim} v_n = +\infty$, car $q = 1,03 > 1$