Résumé : Méthode d'optimisation

1. On choisit les inconnues x et y
2. On traduit le problème en un système d'inéquations d'inconnues x et y
3. On résout graphiquement ce système.

   Pour cela, pour chaque inéquation :

   (a) On trouve l'équation réduite de la droite frontière du demi-plan correspondant à cette inéquation

   (b) On trace cette droite dans un repère adapté (l'échelle est souvent donnée dans l'énoncé).

      Pour cela, on peut par exemple :

      – On choisit deux valeurs (assez éloignées) pour x et calculer les deux valeurs de y vérifiant l'équation de la droite.
      – On place les deux points de coordonnées $(x; y)$ trouvées
      – On les relie

   (c) On choisit au hasard un point du plan

   (d) On regarde si les coordonnées de ce point vérifient l'inéquation

      – Si oui, on hachure le demi-plan ne contenant pas le point
      – Si non, on hachure le demi-plan contenant le point

   La partie du plan non hachurée correspond au domaine des contraintes (Il contient l'ensemble des solutions du système)

4. On trouve l'expression $ax + by$ à optimiser (comme un bénéfice à maximiser)
5. On trace la droite d'équation $ax + by = k$ (pour k choisi au hasard, ou k donné par l'énoncé).

   Voir la méthode ci-dessus pour tracer une droite

6. On trace ensuite la droite parallèle à celle-ci, d'ordonnée à l'origine la plus grande possible (ou la plus petite possible) et ayant au moins un point commun avec le domaine des contraintes
7. Les coordonnées du point d'intersection (ou des points d'intersection) de cette dernière droite et du domaine des contraintes correspondent aux valeurs de x et y pour lesquelles $ax + by$ est maximal (ou minimal)
8. On calcule $ax + by$ pour les valeurs de x et y trouvées précédemment.

Exemple : Un artisan potier et ses ouvriers fabriquent des plats en poteries de deux modèles :

- Le modèle A qui nécessite 500g de terre et 4 heures de travail ;
- Le modèle B qui nécessite 800g de terre et 3 heures de travail.

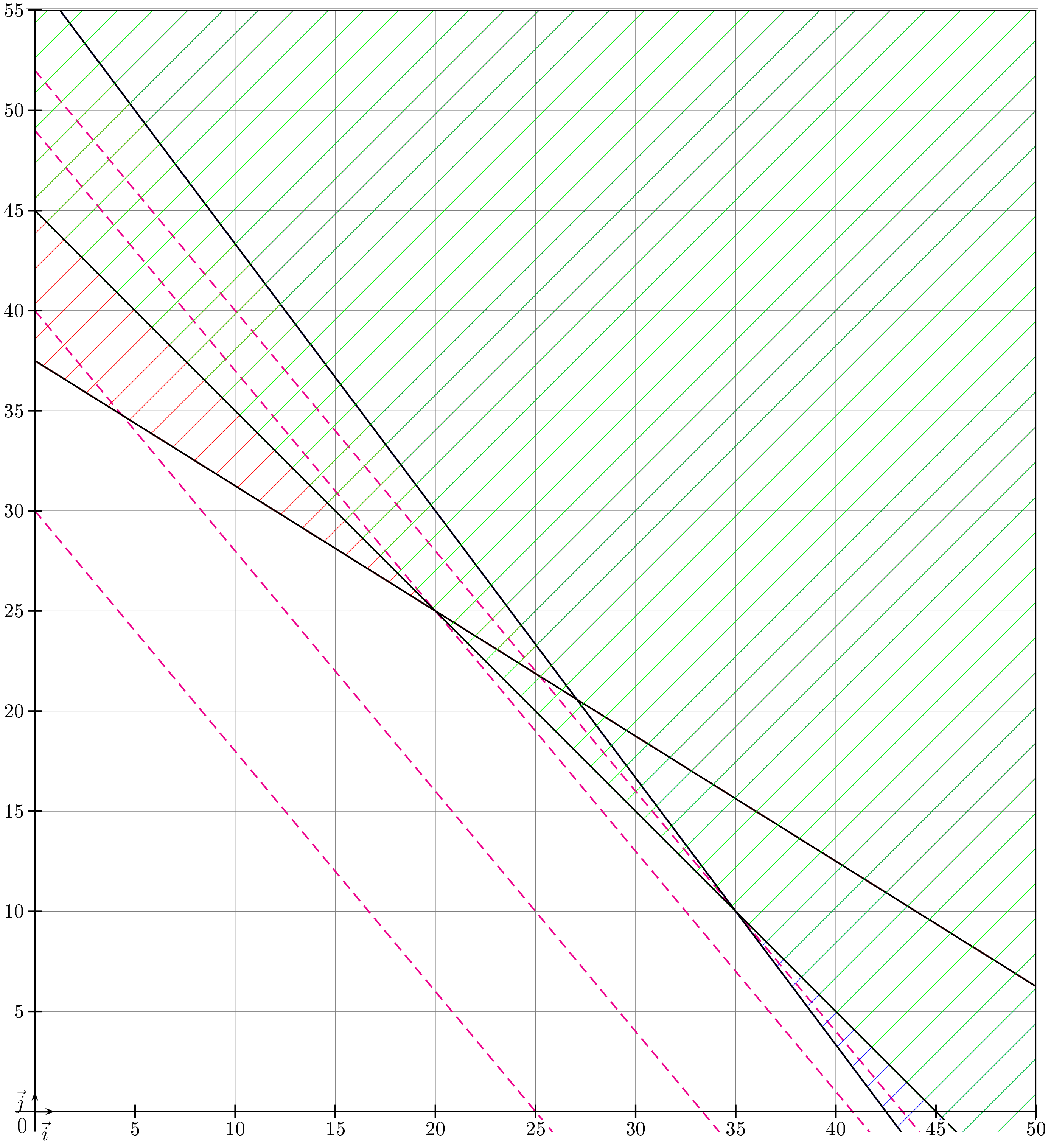
L'artisan dispose par semaine de 30kg de terre et lui et ses ouvriers fournissent au pus 170 heures de travail par semaine. Le four ne peut pas cuire plus de 45 plats par semaine.
On note x le nombre de plats du modèle A fabriqués par semaine et y ceux du modèle B. L'artisan réalise un bénéfice de 6€ par plat de modèle A vendu et 5€ par plat de modèle B. On admet que toute la production hebdomadaire est vendue. Il cherche à déterminer le nombre de plats de chaque modèle qu'il doti fabriquer chaque semaine pour réaliser un bénéfice maximal.

1. (a) Traduire par une inéquation les contraintes sur la quantité de terre.
   (b) Procéder de même pour les heures de travail.
   (c) Quelle est l'inéquation qui correspond à la contrainte liée à la cuisson dans le four ?
2. Expliquer pourquoi les couples $(x; y)$ qui conviennent sont solutions du systèmes : $\begin{cases} x \in \mathbb{N} ; y \in \mathbb{N} \\ 5x + 8y \leq 300 \\ 4x + 3y \leq 170 \\ x + y \leq 45 \end{cases}$
3. (a) Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 2cm pour 5 plats) résoudre graphiquement le système précédent (on hachurera les parties qui ne conviennent pas).

   À savoir : La partie du plan qui apparaît non hachurée sur le graphique est appelée **domaine** ou **polygone des contraintes**, ou **domaine des solutions admissibles**.

   (b) Parmi les couples suivantes, dire ceux qui vérifient l'ensemble des contraintes :
   $(15; 10)$; $(30; 20)$; $(12; 35)$; $(35; 10)$; $(23; 18)$; $(13.5; 15)$

   Pour les autres, préciser quelles contraintes ne sont pas vérifiées.
4. On note $R(x; y)$ le bénéfice réalisé par la vente de x modèles A et y de modèles B.
   (a) Écrire $R(x; y)$ en fonction de x et de y.
   (b) En déduire y en fonction de x et de $R(x; y)$.
   (c) Soit d la droite contenant les points $M(x; y)$ vérifiant l'équation trouvée au (b). Quel est son coefficent directeur ? Son ordonnée à l'origine ?
5. (a) Sur le dessin précédent, tracer la droite d_{150} correspondant à un bénéfice de 150€.
   (b) Citer un couple $(x; y)$ vérifiant cette condition et solution du système
   (c) Tracer la droite d_{200} correspondant à un bénéfice de 200€
   (d) Que peut-on dire des droites d_{150} et d_{200}. Ce résultat était-il prévisible ?
   (e) Déterminer graphiquement la droite permettant de réaliser le bénéfice maximal.
   (f) Déterminer par le calcul le couple solution du système : $\begin{cases} 4x + 3y = 170 \\ x + y = 45 \end{cases}$
   (g) Déterminer le bénéfice maximal.


55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
$\vec{j}$
$\vec{i}$
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50