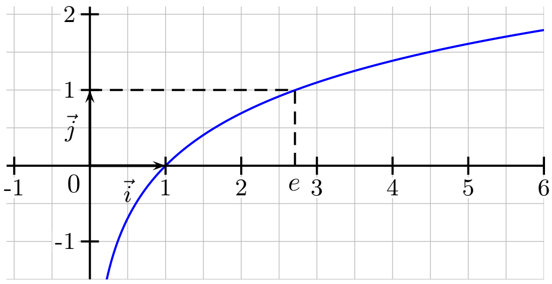
Fiche résumé : Le logarithme Népérien

Propriété 1. On admet l'existence et l'unicité d'une fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, appelée **Logarithme Népérien**, notée ln, telle que : $\ln(1) = 0$ $\qquad \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

Exemples :

- Soit f la fonction définie par $\ln(-2x+3)$.
  Elle n'est définie que pour les x tels que $-2x+3>0 \Leftrightarrow -2x>-3 \Leftrightarrow x<\dfrac{3}{2}$. Donc $D_f =]-\infty;\dfrac{3}{2}[$.
- Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - \ln(x) + 3$. Alors sur $]0;+\infty[$ on a $g'(x) = 2x - \dfrac{1}{x}$.

x	0		1		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	‖		$+$		
$\ln(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\nearrow$	
Signe de $\ln(x)$		$-$	0	$+$	



<u>**Propriétés**</u> :

$\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad ; \quad \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y \quad ; \quad \ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y$

Exemples :

- Pour résoudre $\ln(-2x+3) = 0$, on cherche quand l'équation est définie. On a vu que c'était sur $]-\infty;\dfrac{3}{2}[$.
  Puis, on la résoud : $\ln(-2x+3) = 0 \Leftrightarrow -2x+3 = 1 \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1 \in]-\infty;\dfrac{3}{2}[$. Donc $\mathcal{S} = \{1\}$.
- Pour résoudre $\ln(-2x+3) < \ln(x)$, on cherche que l'inéquation est définie. Il faut $x \in]-\infty;\dfrac{3}{2}[$ et $x > 0$, c'est-à-dire $x \in]0;1.5[$.
  Puis on la résoud : $\ln(-2x+3) < \ln(x) \Leftrightarrow -2x+3 < x \Leftrightarrow -3x < -3 \Leftrightarrow x > 1$. Donc $\mathcal{S} =]1;1.5[$.

<u>**Propriété**</u> :

Pour tous réels strictement positifs a et b, on a

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

<u>**Propriétés**</u> : Pour tous réels strictement positifs a et b, et tout entier naturel n, on a :

$\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln(a^n) = n\ln(a)$

$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \qquad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

Exemples :

- $\ln(42) = \ln(6) + \ln(7) = \ln(2) + \ln(3) + \ln(7)$
- $\ln(\sqrt{2}) - \ln(2^4) = \dfrac{1}{2}\ln(2) - 4\ln(2) = -3.5\ln(2)$
- $\ln\left(\dfrac{33}{4}\right) = \ln(33) - \ln(4) = \ln(11) + \ln(3) - 2\ln(2)$

Propriété 2. Soit une fonction u strictement positive et dérivable sur un intervalle I. Alors, la fonction f définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. On retiendra $\big(\ln(u)\big)' = \dfrac{u'}{u}$.

Exemples :

- Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(2x)$. Alors f est définie ssi $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Donc $D_f = \mathbb{R}^{+*}$. Sur cet intervalle on a $f'(x) = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$.
- Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln(3+5x)$. Alors g est définie ssi $3+5x > 0 \Leftrightarrow 5x > -3 \Leftrightarrow x > -\dfrac{3}{5}$. Donc $D_g =]-\dfrac{3}{5};+\infty[$. Sur cet intervalle on a $g'(x) = \dfrac{5}{3+5x}$.
- Soit h la fonction définie par $h(x) = x\ln(1+x)$. Alors h est définie ssi $1+x > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Donc $D_h =]-1;+\infty[$.
  Sur cet intervalle on a $\ln'(1+x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $x' = 1$. Alors $h'(x) = 1 \times \ln(1+x) + x \times \dfrac{1}{1+x} = \ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$.