Chapitre 2

Probabilités

Hors Sujet

Titre : « Flower Chucker »
Auteur : BANKSY-POCHOIRISTE
Présentation succinte de l'auteur : Il combine les techniques du graffiti et du pochoir pour faire passer ses messages, qui mêlent souvent politique, humour et poésie comme Ernest Pignon-Ernest ou Blek le rat. Les pochoirs de Banksy sont des images humoristiques, parfois combinés avec des slogans. Le message est généralement antimilitariste, anticapitaliste ou antisystème. Ses personnages sont souvent des rats, des singes, des policiers, des soldats, des enfants ou des personnes âgées.
Il s'est forgé une certaine notoriété dans les milieux alternatifs et les médias traditionnels s'intéressent aussi à lui. Il a notamment travaillé sur le film Les Fils de l'homme2 et a réalisé en 2003 la pochette du disque de Blur, Think Tank.
Banksy a fondé le projet « Santa's Ghetto »en réalisant des peintures sur le mur de Gaza afin de redonner espoir aux habitants palestiniens et israéliens. Aidé par d'autres artistes, comme Ron English, un Américain, le mur de séparation prend petit à petit les couleurs d'une toile artistique géante, comme avec l'image de la petite Vietnamienne brûlée au napalm qui tient par la main Mickey Mouse et Ronald McDonald.
Concernant ce projet, Banksy raconte dans son livre Wall and Piece, qu'un jour, alors qu'il peignait sur le mur de séparation, un habitant est venu lui dire : « vous embellissez le mur ». Banksy, flatté : « Merci, c'est gentil », fut aussitôt coupé par le vieil homme : « On ne veut pas que ce mur soit beau, on ne veut pas de ce mur, rentrez chez vous ».

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

I) Vocabulaire des probabilités **1**
I-1 Expérience aléatoire 1
I-2 Vocabulaire ensembliste 2
I-2.1 Réunion, intersection et contraire 2
I-2.2 Illustration sur un exemple 2
I-2.3 Représenter une expérience aléatoire sous forme d'un tableau ou à l'aide d'un arbre 3

II) Notion de probabilité **4**
II-1 Loi de probabilité 4
II-2 Équiprobabilité 5
II-3 Quelques propriétés 6

III) Probabilités conditionnelles **7**
III-1 Probabilités conditionnelles 7
III-2 Arbres de probabilités 8
III-3 Indépendance de deux événements 9

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
Thurston Moore (Sonic Youth)

Leçon 2

Probabilités

I) Vocabulaire des probabilités

Travail de l'élève : Un jeu télévisé se déroule de la manière suivante : il y a trois portes, derrière l'une d'entre elle se trouve 10000 € et rien derrière les deux autres. Un candidat choisit au hasard l'une des trois. Ensuite le présentateur élimine une des deux portes mauvaises, tout en conservant celle choisit par le candidat. Le candidat peut alors conserver son choix ou le changer.
Que vaut-il mieux faire pour le candidat, changer ou conserver son choix ? Quels sont ces chances de gagner dans le premier cas, et dans le deuxième ?

I-1 Expérience aléatoire

Définition 1 :

Une expérience aléatoire est un processus dont le résultat est incertain

Exemple :

Le lancé de dé ou le lancé d'une pièce de monnaie sont des expériences dont l'issue est incertaine.

Une urne contient trois boules : une bleue, une rouge et une noire. L'ensemble des résultats possibles (éventualités) peut être noté $\Omega = \{R; B; N\}$ (l'univers).
L'évènement : « tirer une boule rouge »correspond à $\{R\}$
L'évènement : « tirer une boule verte »correspond à $\{V\}$
L'évènement : « tirer une boule non rouge »correspond à $\{V; B\}$

Définition 2 :

- Un des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité** ou **issue**
- L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers**
- Un sous ensemble de l'univers est appelé **événement**, c'est un ensemble constitué d'éventualités de l'univers.

Exemple :

- On lance une pièce de monnaie et on regarde la face obtenue, l'univers est alors : $\{pile; face\}$
- On lance un dé cubique et on regarde la face obtenue, l'univers est alors :$\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

I-2 Vocabulaire ensembliste

I-2.1 Réunion, intersection et contraire

Travail de l'élève : **Décrire l'aléatoire avec des ensembles**
Un dé, dodécaèdre régulier, a 12 faces identiques, numérotées de 1 à 12. Le numéro apparaissant sur la face supérieure, à la suite d'un lancer, est une issue de ce lancer.
Décrire :

1. l'univers Ω
2. l'ensemble A des issues paires
3. l'ensemble B des issues paires et multiples de 3
4. l'ensemble C des issues paires ou multiples de 3
5. l'ensemble D des issues qui ne sont pas multiples de 3

Définition 3 :

Réunion, intersection et contraire
Soit A et B deux sous ensemble de Ω
– Les éléments qui sont dans A **ou** dans B constituent l'ensemble $A \cup B$, **réunion** de A et de B.
– Les éléments qui sont dans A **et** dans B constituent l'ensemble $A \cap B$, **intersection** de A et de B.
– Les événements qui sont dans Ω et qui ne sont pas dans A forment l'ensemble **contraire** de A noté $\bar{A}$

I-2.2 Illustration sur un exemple

Exemple :
On lance deux dés et l'on considère la somme obtenue. Le tableau ci-dessous résume le vocabulaire relatif aux événements et le vocabulaire ensembliste

Vocabulaire	**Signification**	**Illustration**
L'univers Ω, événement **certain**	L'ensemble des éventualités	$\Omega =$
L'ensemble vide $\emptyset$, événement **impossible**	L'ensemble qui ne contient aucune éventualité	
Éventualité	L'un des résultats de l'exprérience	Obtenir 7 : $\omega =$
Événement	Sous ensemble de l'univers	Obtenir un nombre pair : $A = \dots$; ou obtenir une somme inférieure à 4 : $B =$
Événement A **et** B, $A \cap B$	Événement constitué des issues communes aux 2 événements	$A \cap B =$
Événement A **ou** B, $A \cup B$	Événement constitué de toutes les issues possibles des 2 événements	$A \cup B =$
Événement **incompatibles** ou **disjoints**, on note $A \cap B = \emptyset$	Ce sont des événements qui n'ont aucunes issues en commun	$\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \emptyset$
Événement **contraire** ; le contraire de A se note $\bar{A}$	Ce sont 2 événements incompatibles dont la réunion forme l'univers	$\bar{A} = \dots\dots\dots\dots$ $A \cap \bar{A} = \dots\dots\dots\dots$ et $A \cup \bar{A} = \dots\dots\dots$

Exercice 1 :

On jette un dé dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on s'interesse au numéro sur la face supérieure.

1. Définir l'univers Ω
2. Décrire les événements suivants :
   A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 »
   B : « obtenir un numéro impair »
   C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 »
3. Décrire les événements suivants : $A \cap B$; $A \cup B$; $A \cap C$; $A \cup C$; $C \cap B$; $C \cup B$; $\bar{A}$; $\bar{A} \cup C$; $\bar{A} \cap C$
4. Parmi les événements précédents, citer deux événements incompatibles qui ne sont pas contraire l'un de l'autre.

I-2.3 Représenter une expérience aléatoire sous forme d'un tableau ou à l'aide d'un arbre

Exemple :

À l'aide d'un tableau

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. Par exemple, l'issue « pile au premier lancer et face au second lancer »sera notée PF.

On peut utiliser un tableau à double entrée pour représenter l'univers Ω_1 de cette expérience :

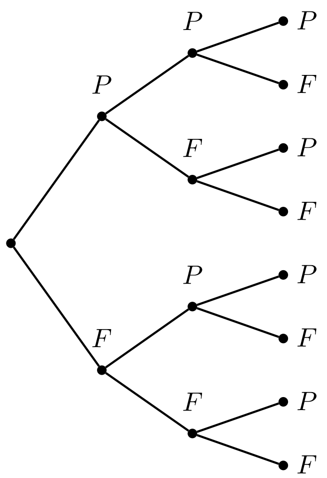
	Pile	Face
Pile	PP	FP
Face	PF	FF

Dans le tableau ci-contre on peut lire l'univers Ω_1 constitué de 4 issues, c'est-à-dire :

$$\Omega_1 = \{PP; PF; FP; FF\}$$

À l'aide d'un arbre On lance trois fois de suite une pièce de monnaie. Par exmple, l'issue « pile au premier lancer, face au second lancer et pile au troisième lancer sera notée PFP.

On peut utiliser un arbre pour représenter l'univers Ω_2 de cette expérience :



Dans l'arbre ci-contre on peut lire l'univers Ω_2 constitué de 8 issues, c'est-à-dire :

$$\Omega_2 = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP; FFF\}$$

L'événement A : « faire pile au troisième lancer »est par exemple :

$$A = \{PPP; PFP; FPP; FFP\}$$

L'événement B : « faire pile au 3 lancer »est :

$$B = \{PPP\}$$

Exercice 2 :

On lance deux fois de suite un dé à six faces numérotées de 1 à 6

Une issue de cette épreuve est un couple : {résultat du 1^{er} lancer ; résultat du 2^e lancer)

1. À l'aide d'un tableau, déterminer le nombre d'issues possibles
2. Écrire sous forme d'ensemble chacun des événements :
   A : « obtenir un 6 au premier lancer »
   B : « obtenir exactement un 6 »
   $A \cap B$ et $A \cup B$

Exercice 3 :

Une urne contient deux boules rouges numérotées 1 et 2, et une boule verte. On tire successivement trois boules en remettant chaque boule dans l'urne avant de tirer la suivante.

1. (a) Représenter l'univers de cette exprérience par un arbre
   (b) Déterminer le nombre d'issues de chacun des événements :
   A : « la première boule tirée est verte »
   B : « la deuxième boule tirée est rouge »
2. Écrire sous forme d'ensemble l'événement $A \cap B$

II) Notion de probabilité

II-1 Loi de probabilité

Travail de l'élève : **TP excel : Le jeu télévisé**

On réalise en salle informatique deux expériences :

– La première : on cherche expérimentalement les probabilités de gain et de perte à ce jeu sachant que le conserve son choix
– La seconde : on cherche expérimentalement les probabilités de gain et de perte à ce jeu sachant que l'on change de choix

Si on conserve notre choix :

L'expérience montre que l'on a environ $\frac{1}{3}$ de gagner et donc environ $\frac{2}{3}$ de perdre. L'univers Ω_1 de cette expérience est alors : $\Omega_1 = \{gain; perte\}$.

On peut réaliser le tableau suivant :

	gain	perte
probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Dans la deuxième ligne du tableau, on lit ce qu'on appelle **la loi de probabilité** associé à l'univers Ω_1, c'est-à-dire les probabilités de chaque éventualité de Ω_1. On note : $p_1(gain) = \frac{1}{3}$ et $p_1(perte) = \frac{2}{3}$

Si on change notre choix :

L'expérience montre que l'on a environ $\frac{2}{3}$ de gagner et donc environ $\frac{1}{3}$ de perdre. L'univers Ω_2 de cette expérience est toujours : $\Omega_2 = \{gain; perte\}$.

On peut réaliser le tableau suivant :

	gain	perte
probabilité	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Dans la deuxième ligne du tableau, on lit **la loi de probabilité** associé à l'univers Ω_2, c'est-à-dire les probabilités de chaque éventualité de Ω_2. On note : $p_2(gain) = \frac{2}{3}$ et $p_2(perte) = \frac{1}{3}$

Remarque : Quelques explications du jeu télévisé :

– Si on conserve notre choix, pour gagner, il faut donc avoir choisit la première porte dès le premier choix, on a donc 1 chance sur 3 de choisir la bonne porte, puisqu'il y a une bonne porte et deux mauvaises ! !
  En revanche si l'on choisit une mauvaise porte : on perd. Comme il y a deux mauvaises portes on a 2 chances sur 3 de perdre ! !
– Si on change notre choix, pour gagner, il faut donc avoir choisit une des deux mauvaises portes dès le premier choix (car on changera pour la bonne !), on a donc 2 chances sur 3 de gagner
  En revanche si l'on choisit la bonne porte : on perd. Comme il n'y a qu'une mauvaise porte on a 1 chance sur 3 de perdre ! !
– Conclusion : À ce jeu, il est préférable de changer son choix ! ! !

Définition 4 :

Soit $\Omega = \{e_1; e_2; e_3; \dots; e_n\}$ l'univers d'une épreuve aléatoire, où chaque e_i désigne une issue.
Définir une **loi de probabilité** sur l'univers Ω, c'est associer à chaque issue e_i une probabilité p_i, nombre réel tel que :

1. pour tout i, $0 \leq p_i \leq 1$
2. $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$
3. la probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités de toutes les issues de A.

Remarque : Cas particuliers !
- La probabilité de l'événement certain est : $p(\Omega) = 1$
- La probabilité de l'événement impossible est : $p(\emptyset) = 0$

Exercice 4 :

On lance un dé équilibré à 6 faces.

1. Définir l'univers Ω
2. Définir une loi de probabilité sur Ω qui corresponde à cette expérience
3. Calculer la probabilité de l'événement A : « faire un score supérieur ou égal à 5 »

Exercice 5 :

On considère un dé truqué à 9 faces. Une fois lancé le dé a 2 fois plus de chances de tomber sur le 1 que sur tout autre chiffre.

1. Déterminer la probabilité de chacune des issues sous forme de tableau (c'est-à-dire trouver la loi de probabilité)
2. Quelle est la probabilité que la boule s'arrête sur un chiffre noir ?

Interprétation
La probabilité d'un événement traduit la confiance que l'on a dans la réalisation de celui-ci. Une probabilité proche de 1 traduite une confiance élevée tandis qu'une probabilité proche de 0 traduit le peu de confiance dans sa réalisation

II-2 Équiprobabilité

Il y a équiprobabilité sur l'univers Ω lorsque toutes les issues ont la même probabilité : si Ω, la probabilité de chaque issue est $\frac{1}{n}$, et si un événement A est constitué de k issues, sa probabilité est $p(A) = k \times \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$

Propriété 1 :

S'il y a équiprobabilité sur l'univers Ω, la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$$

Exercice 6 :

Dans un jeu de 32 cartes, on en tire une au hasard

1. Quelle est la probabilité d'obtenir l'as de pique ?
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « obtenir un as » P : « obtenir un pique » F : « obtenir une figure »

II-3 Quelques propriétés

Travail de l'élève : **À la découverte des formules**

Un transporteur doit charger 50 colis à livrer. Sur son bordereau il a les informations suivantes :

	Par courrier	Par internet	À la livraison	Total
Société	9	6	0	15
Particulier	21	10	4	35
Total	30	16	4	50

Il prend un colis au hasard. On considère les événements suivants :
L : « le colis est payable à la livraison »
I : « le colis est payé par internet »
S : « le colis est destiné à une société »
P : « le colis est destiné à particulier ».

1. (a) Calculer $p(S)$ et $p(P)$
   (b) Quel lien y-a-t-il entre les événements S et P ?
   (c) Quelle relation peut-on établir entre leurs probabilités ?
2. (a) Les événements L et I sont-ils incompatibles ? Calculer $p(L)$ et $p(I)$
   (b) Exprimer par une phrase lévénement $L \cup I$, puis calculer sa probabilité
   (c) Quelle relation peut-on établir entre $p(L)$, $p(I)$ et $p(L \cup I)$?
3. (a) Exprimer par une phrase lévénement $I \cup S$, puis calculer sa probabilité.
   (b) La relation de la question 2 (c) convient-elle pour $p(I)$, $p(S)$ et $p(I \cup S)$? Pourquoi ?

Propriété 2 :
On considère A et B deux événements d'une expérience aléatoire, on a alors :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Exercice 7 :
On donne $p(A) = \dfrac{1}{2}$; $p(A \cup B) = \dfrac{2}{3}$ et $p(A \cap B) = \dfrac{1}{3}$. Calculer $p(B)$

Remarque : Si A et B sont incompatibles, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$, alors $p(A \cap B) = 0$ et donc $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Propriété 3 :
Soit A un événement, alors :

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

Exercice 8 :
On lance un dé cubique non pipé.

1. Exprimer la loi de probabilité sous la forme d'un tableau
2. Calculer la probabilité de l'événement A : « ne pas faire 6 »

Exercice 9 :
Un magasin commercialise un lot de 500 tee-shirts (avec ou sans manche), dont 350 présentent un défaut. Parmi les 300 tee-shirts avec manches, seuls 10 sont sans défaut. Un client choisit un tee-shirt au hasard.
On note M : « le tee-shirt a des manches »et S : « le tee-shirt est sans défaut »

1. Calculer $p(M)$, $p(S)$ et $p(M \cap S)$
2. En déduire $p(M \cup S)$

Exercice 10 :

Dans un univers Ω, A et B sont deux événements incompatibles.
$p(A) = 0,4$ et $p(B) = 0,5$

1. Calculer la probabilité de $A \cup B$
2. En déduire $p(\overline{A \cup B})$

III) Probabilités conditionnelles

III-1 Probabilités conditionnelles

Travail de l'élève : À l'épreuve pratique du permis de conduire, on a observé les résultats suivants sur un échantillon de 503 candidats se présentant pour la première fois.

Candidats	ayant pratiqué la conduite accompagnée	n'ayant pas pratiqué la conduite accompagnée	Total
réuss	68	205	273
échoué	19	211	230
Total	87	416	503

On choisit par hasard un candidat dans cet échantillon.
On considére les événements C : « le candidat a pratiqué la conduite accompagnée »
R : « le candidat a réussi à la première présentation »
On donnera les résultats sous forme de fractions.

1. Calculer les pobabilités $p(C)$, $p(R)$ et $p(C \cap R)$
2. Le candidat déclare qu'il a pratiqué la conduite accompagnée. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu son permis à la première présentation. Expliquer pourquoi le quotient $\dfrac{p(C \cap R)}{p(C)}$ donne le même résultat.
3. Le candidat déclare qu'il a obtenu son permis à la première présentation. Déterminer la probabilité qu'il ait pratiqué la conduite accompagnée. Expliquer pourquoi le quotient $\dfrac{p(C \cap R)}{p(R)}$ donne le même résultat.

Propriété 4 :

Dans l'univers Ω d'une épreuve aléatoire, on considère un événement B tel que $p(B) \neq 0$.
Pour tout événement A, on appelle **probabilité conditionnelle de A sachant B**, notée $p_B(A)$ le nombre $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$. On a ainsi : $p(A \cap B) = p(B)p_B(A)$

Exemple :

Dans un sac de dragées, 60% des dragées sont de couleur bleue, 30% des dragées sont bleues et à l'amande et 40% des dragées bleues sont au chocolat. On choisit une dragée au hasard dans le sac.
On note A : « la dragée est à l'amande »
B : « la dragée est bleue »
C : « la dragée est au chocolat ».
Calculer $p(B)$, $p(A \cap B)$, $p_B(C)$, $p_B(A)$ et $p(B \cap C)$.

Exercice 11 :

On a interrogé des élèves de terminale sur leurs loisirs : 50% d'entre eux déclarent aimer la lecture et 75% déclarent aimer le sport.
De plus, 40% des élèves déclarent aimer le sport et la lecture. Pour un de ces élèves rencontré au hasard, on considère les événements
L : « l'élève aime la lecture »et S : « l'élève aime le sport »

1. Donner les probabilités des événements L, S et $L \cap S$.
2. Quelle est la probabilité que lélève aime le sport sachant qu'il aime la lecture ?
3. Quelle est la probabilité que l'élève aime la lecture sachant qu'il aime le sport ?

Exercice 12 :

Dans un centre d'enquêtes menées par téléphone, on a constaté, d'une part que 72% des personnes contactées sont des femmes, d'autre part que 25% des femmes contactées acceptent de répondre au questionnaire.
Une personne est contactée par un appel du centre lancé au hasard.

1. En utilisant les événements F : « la personne contactée est une femme »et R : la personne contactée accepte de répondre au questionnaire », traduire les données de lénoncé par des probabilités
2. Calculer la probabilité que la personne contactée soit une femme et qu'elle accepte de répondre au questionnaire.

Exercice 13 :

Dans son jeu vidéo préféré, Sylvain choisit toujours au hasard l'un des trois adversaires virtuels A, B ou C. Après de nombreuses parties, il a constaté qu'il a joué et gagné contre A dans 25% des cas.

1. En notant A : « Sylvain joue contre A »et G : « Sylvain gagne », donner les probabilités des événements A et $A \cap G$
2. Quelle est la probabilité que Sylvain gagne sachant qu'il joue contre A ?

Exercice 14 :

À Brest, quand Barbara sort lorsqu'il pleut, elle prend aléatoirement son parapluie, 3 fois sur 4.

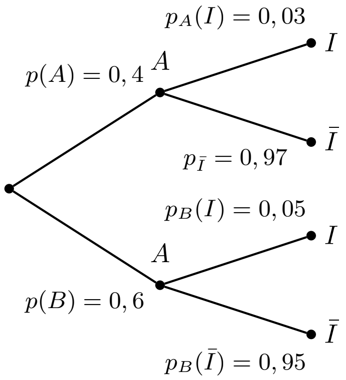
1. En considérant les événements H : « Il pleut à Brest »et G : « Barbara prend son parapluie », exprimer la donnée précédente par une probabilité.
2. On suppose que $p(H) = 0,58$.
   Calculer la probabilité qu'il pleuve à Brest et que Barbara puisse s'abriter sous son parapluie.

III-2 Arbres de probabilités

On sera amené souvent à construire un arbre appelé arbre pondéré ou arbre de probabilité pour décrire une situation, comme dans l'exemple qui suit :
L'entreprise Duracier emboutit des pi`eces métalliques sur deux machines A et B.
La machine A produit 40% de la production et donc la machine B en produit 60%. Des études statistiques ont montré que 3% des pièces provenant de la machine A sont impropres à la vente ainsi que 5% des pièces provenant de la machine B.
On choisit une piéce au hasard dans la production et on note :
A : « la pièce provient de la machine A »
B : « la pièce provient de la machine B »
I : « la pièce est impropre à la vente »
Les données peuvent se traduire par :

$$p(A) = 0,4\,;\ p(B) = 0,6\,;\ p_A(I) = 0,03 \text{ et } p_B(I) = 0,05$$

Les propriétés des probabilités appliquées aux probabilités p_A et p_B permettent d'en déduire :
$p_A(\bar{I}) = 1 - 0,03 = 0,97$; $p_B(\bar{I}) = 1 - 0,050,95$ et de construire l'arbre suivant :



On en déduit :
$p(I \cap A) = p_A(I) \times p(A) = 0,03 \times 0,4 = 0,012$
$p(I \cap B) = p_B(I) \times p(B) = 0,05 \times 0,6 = 0,03$
$p(I) = p(I \cap A) + p(I \cap B) = 0,012 + 0,03 = 0,042$

Propriété 5 :

Trois propriétés sont très utiles pour construire les arbres et les utiliser :

1. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ces branches
(exemple :$p(I \cap A) = p_A(I) \times p(A) = 0,03 \times 0,4 = 0,012$)
2. Pour les branches issues d'un même noeud, la somme des probabilités vaut 1
(exemple : $p_A(I) + p_A(\bar{I}) = 0,03 + 0,97 = 1$)
3. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent
(exemple : $p(I) = p(I \cap A) + p(I \cap B) = 0,012 + 0,03 = 0,042.$)

On admet que ces propriétés restent vraies quel que soit le nombre de niveaux de l'arbre, et quel que soit le nombre de branches issues d'un noeud.

III-3 Indépendance de deux événements

Travail de l'élève : **Des goûts et des couleurs. . .** Une agence de tourisme propose 1000 tickets à gratter, tous gagnants.
990 d'entre eux font gagner une paire de lunettes de soleil et 10 font gagner un voyage, soit en Asie, soit en Afrique.
Les tickets sont de deux couleurs, rose ou bleue. Le tableau ci-dessous donne la répartition des tickets.

	Lunettes de soleil	Voyage en Asie	Voyage en Afrique	Total
Tickets roses	594	4	2	600
Tickets bleus	396	1	3	400
Total	990	5	5	1000

Un client reçoit au hasard un des 1000 tickets.
On considère les événements R : « le ticket reçu est rose »et V : « le client gagne un voyage ».

1. (a) Calculer $p(V)$, $p_R(V)$ et $p_{\bar{R}}(V)$.
   (b) La probabilité de gagner u voyage dépend-elle de la couleur du ticket reçu ?
   (c) Calculer $p(R)$ et vérifier que $p(V \cap R) = p(V)p(R)$
2. On note A l'événement « le client gagne un voyage en Asie ».
   (a) Calculer $p(A)$, $p_R(A)$ et $p_{\bar{R}}(A)$.
   (b) La probabilité de gagner u voyage en Asie dépend-elle de la couleur du ticket reçu ?
   (c) Vérifier que $p(A \cap R) \neq p(A)p(R)$.

Définition 5 :

Dans l'univers Ω d'une épreuve aléatoire, on considère des événements A et B.
On dit que A et B sont des **événements indépendants** lorsque :

$$p(A \cap B) = p(A)p(B)$$

On dit que deux événements sont dépendants lorsqu'ils ne sont pas indépendants.

Propriété 6 :
Si $p(B) \neq 0$, A et B sont indépendants équivaut à $p_B(A) = p(A)$. Autrement dit la probabilité de l'un est la même avec ou sans la condition que l'autre se réalise.

Exemple :
On lance deux fois de suite une pièce de monnaie et on considére les événements
A : « obtenir pile au premier lancer »
B : « obtenir deux résultats identiques »

1. Décrire l'univers Ω, A, B et $A \cap B$
2. Déterminer $p(A)$, $p(B)$ et $p(A \cap B)$
3. En déduire que A et B sont indépendants.

Exercice 15 :
Dans un sac contenant 24 jetons numérotés de 1 à 24, on tire au hasard un jeton.
On considère les événements
T : « obtenir un multiple de trois »
S : « obtenir au moins 15 »
P : « obtenir un nombre pair »

1. Calculer $p(T)$, $p(S)$ et $p(S \cap T)$. Les événements S et T sont-ils indépendants ?
2. Calculer $p_P(T)$. Les événements P et T sont-ils indépendants ?

Exercice 16 :
Deux voisines, Susie, secrétaire médicale, et Chloé, commerciale, font le même trajet après leur journée de travail. Chacune prend si possible le train de 18 h, sinon, celui de 18 h 30. On considère que les contraintes horaires de fin de journée de travail des deux voisines sont indépendantes.
La probabilité d'avoir le premier train est 0,9 pour Susie et 0,8 pour Chloé. Un soir donné, quelle est la probabilité que les deux voisines se retrouvent :

1. dans le train de 18 h
2. dans le train de 18 h 30

Exercice 17 :
On lance un dé non pipé à six face numérotées de 1 à 6.

1. Déterminer les probabilités des événements A : « obtenir au plus 3 »
   B : « obtenir un multiple de 3 »
   C : « obtenir un nombre impair »
2. Calculer $p_B(A)$, $p_A(C)$ et $p(B \cap C)$.
3. A et B sont-ils indépendants ? A et C sont-ils indépendants ? B et C sont-ils indépendants ?

Exercice 18 :
Joseph, barman à la cafétéria d'un aéroport, a constaté que le matin, 50% des français et 90% des anglais prennent un thé. Ce matin, deux nouveaux clients, un français et un anglais, commandent indépendamment l'un de l'autre.
Quelle est la probabilité que Joseph serve deux thés ?

Les Annexes

Activités : Probabilités

Travail de l'élève : Un jeu télévisé se déroule de la manière suivante : il y a trois portes, derrière l'une d'entre elle se trouve 10000 € et rien derrière les deux autres. Un candidat choisit au hasard l'une des trois. Ensuite le présentateur élimine une des deux portes mauvaises, tout en conservant celle choisit par le candidat. Le candidat peut alors conserver son choix ou le changer.
Que vaut-il mieux faire pour le candidat, changer ou conserver son choix ? Quels sont ces chances de gagner dans le premier cas, et dans le deuxième ?

Travail de l'élève : **Décrire l'aléatoire avec des ensembles**
Un dé, dodécaèdre régulier, a 12 faces identiques, numérotées de 1 à 12. Le numéro apparaissant sur la face supérieure, à la suite d'un lancer, est une issue de ce lancer.
Décrire :

1. l'univers Ω
2. l'ensemble A des issues paires
3. l'ensemble B des issues paires et multiples de 3
4. l'ensemble C des issues paires ou multiples de 3
5. l'ensemble D des issues qui ne sont pas multiples de 3

Travail de l'élève : **À la découverte des formules**
Un transporteur doit charger 50 colis à livrer. Sur son bordereau il a les informations suivantes :

	Par courrier	Par internet	À la livraison	Total
Société	9	6	0	15
Particulier	21	10	4	35
Total	30	16	4	50

Il prend un colis au hasard. On considère les événements suivants :
L : « le colis est payable à la livraison »
I : « le colis est payé par internet »
S : « le colis est destiné à une société »
P : « le colis est destiné à particulier ».

1. (a) Calculer $p(S)$ et $p(P)$
   (b) Quel lien y-a-t-il entre les événements S et P ?
   (c) Quelle relation peut-on établir entre leurs probabilités ?
2. (a) Les événements L et I sont-ils incompatibles ? Calculer $p(L)$ et $p(I)$
   (b) Exprimer par une phrase lévénement $L \cup I$, puis calculer sa probabilité
   (c) Quelle relation peut-on établir entre $p(L)$, $p(I)$ et $p(L \cup I)$?
3. (a) Exprimer par une phrase lévénement $I \cup S$, puis calculer sa probabilité.
   (b) La relation de la question 2 (c) convient-elle pour $p(I)$, $p(S)$ et $p(I \cup S)$? Pourquoi ?

Exercices : Probabilités

Exercice 1. On jette un dé dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on s'interesse au numéro sur la face supérieure.

1. Définir l'univers Ω
2. Décrire les événements suivants :
   A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 »
   B : « obtenir un numéro impair »
   C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 »
3. Décrire les événements suivants : $A \cap B$; $A \cup B$; $A \cap C$; $A \cup C$; $C \cap B$; $C \cup B$; $\bar{A}$; $\bar{A} \cup C$; $\bar{A} \cap C$
4. Parmi les événements précédents, citer deux événements incompatibles qui ne sont pas contraire l'un de l'autre.

Exercice 2. On lance deux fois de suite un dé à six faces numérotées de 1 à 6
Une issue de cette épreuve est un couple : {résultat du 1^{er} lancer ; résultat du 2^{e} lancer)

1. À l'aide d'un tableau, déterminer le nombre d'issues possibles
2. Écrire sous forme d'ensemble chacun des événements :
   A : « obtenir un 6 au premier lancer »
   B : « obtenir exactement un 6 »
   $A \cap B$ et $A \cup B$

Exercice 3. Une urne contient deux boules rouges numérotées 1 et 2, et une boule verte. On tire successivement trois boules en remettant chaque boule dans l'urne avant de tirer la suivante.

1. (a) Représenter l'univers de cette exprérience par un arbre
   (b) Déterminer le nombre d'issues de chacun des événements :
   A : « la première boule tirée est verte »
   B : « la deuxième boule tirée est rouge »
2. Écrire sous forme d'ensemble l'événement $A \cap B$

Exercice 1. On lance un dé équilibré à 6 faces.

1. Définir l'univers Ω
2. Définir une loi de probabilité sur Ω qui corresponde à cette expérience
3. Calculer la probabilité de l'événement A : « faire un score supérieur ou égal à 5 »

Exercice 2. On considère un dé truqué à 9 faces. Une fois lancé le dé a 2 fois plus de chances de tomber sur le 1 que sur tout autre chiffre.

1. Déterminer la probabilité de chacune des issues sous forme de tableau (c'est-à-dire trouver la loi de probabilité)
2. Quelle est la probabilité que la boule s'arrête sur un chiffre noir ?

Exercice 3. Dans un jeu de 32 cartes, on en tire une au hasard

1. Quelle est la probabilité d'obtenir l'as de pique ?
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

   A : « obtenir un as » P : « obtenir un pique » F : « obtenir une figure »

Exercice 4. On donne $p(A) = \dfrac{1}{2}$; $p(A \cup B) = \dfrac{2}{3}$ et $p(A \cap B) = \dfrac{1}{3}$. Calculer $p(B)$

Exercice 5. On lance un dé cubique non pipé.

1. Exprimer la loi de probabilité sous la forme d'un tableau
2. Calculer la probabilité de l'événement A : « ne pas faire 6 »

Exercice 6. Un magasin commercialise un lot de 500 tee-shirts (avec ou sans manche), dont 350 présentent un défaut. Parmi les 300 tee-shirts avec manches, seuls 10 sont sans défaut. Un client choisit un tee-shirt au hasard.
On note M : « le tee-shirt a des manches »et S : « le tee-shirt est sans défaut »

1. Calculer $p(M)$, $p(S)$ et $p(M \cap S)$
2. En déduire $p(M \cup S)$

Exercice 7. Dans un univers Ω, A et B sont deux événements incompatibles.
$p(A) = 0,4$ et $p(B) = 0,5$

1. Calculer la probabilité de $A \cup B$
2. En déduire $p(\overline{A \cup B})$