Chapitre 2 : Optimisation

D. Zancanaro C. Aupérin

2008-2009

"Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous" Thurston Moore

Dernière modification : 8 octobre 2008

Table des matières

1 Rappels et compléments sur les droites **2**
1.1 Équations de droites 2
1.2 Représentation graphique de droites 4
1.3 Déterminer une équation de droite 5

2 Systèmes d'équations linéaires **7**

3 Régionnement du plan **10**
3.1 Avec une droite 10
3.2 Avec plusieurs droites 13

4 Optimisation **15**

Cours : Optimisation

Type de problèmes que l'on souhaite résoudre

Situation 1 : Transmath n°56 p 74
David veut commercialiser des tables et des chaises. Les chaises lui coûtent 700 000 € à l'année pour l'entretien des machines et autres puis 60 € par unitée fabriquée, qu'il vend ensuite 100 €. Les tables lui coûtent 500 000 € à l'année pour l'entretien des machines et autres puis 110 €par unitée fabriquée, qu'il vend ensuite 130 €. Avant de se lancer, il souhaite savoir dans quelles proportions il doit vendre ses produits pour réaliser un bénéfice de 100 000 €sur une année.

On appelle x le nombre de chaises vendues et y le nombre de tables vendues. Le problème revient alors à résoudre une équation du type $ax + by = c$, dans laquelle les inconnues sont les deux valeurs x et y, et où a, b et c sont des réels donnés par l'énoncé (mais à trouver tout de même).

Dans le cas où a ou b est nul, il s'agit simplement de résoudre une équation du premier degré à une inconnue. Nous allons voir que l'équation à résoudre représente en fait l'équation généralisée des droites. Autrement dit, les solutions de cette équation sont les abscisses et les ordonnées de tous les points de la droite déquation $ax + by = c$.

Situation 2 : Hachette n°29 p 54
David décide de se lancer également dans la production de salade. Une tomates, 100g de dés de jambon et 40g de gruyère entre dans la composition des salades de type A.
Deux tomates, 50g de dés de jmabon et 40g de gruyère entre dans la composition des salades de type B.
Il a acheté 40 tomates, 2kg de jambon et 1kg de gruyère. Il a tous les ingrédients en quantité suffisante.
David pourra-t-il vendre 10 salades de chaque sorte ? 15 salades de chaque sortes ?

Situation 3 : Indice Activité 1 p 68
David se lance maintenant dans la production de deux modèles de jouets en bois : des wagons et des rails.
Un wagon nécessite 1h de travail et 2kg de bois. Un rail nécessite 1/2h de travail et 3kg de bois.
Il dispose quotidiennement de 24kg de bois, il travaille au plus 8h par jour et limite sa production quotidienne de rails à 7 unités au plus.
La vente d'un rail lui rapporte un bénéfice de 12 €, celle d'un wagon un bénéfice de 18 €. On suppose que toot objet fabriqué est vendu.
David cherche dans quels cas il peut obtenir un bénéfice maximal sous les contraintes données.

Dans tout le chapitre, le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1 Rappels et compléments sur les droites

Travail de l'élève : On appelle D l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ telles que $3x - 2y = 4$ et D' l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ telles que $-9x + 6y = -12$.

1. Étude de la nature de D.
   – Parmi les couples suivants, indiquer ceux qui appartiennent á l'ensemble D. :

$$(1; 1) \quad ; \quad (0; -2) \quad ; \quad \left(\frac{2}{3}; 1\right) \quad ; \quad (1.5; 0.25)$$

   – Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.
   Montrer que l'équation $3x - 2y = 4$ est en fait l'équation d'une droite, non paralléle à l'axe des ordonnées, que l'on précisera.
   – En déduire le nombre de points appartenant à D et sa nature géométrique.
2. Quelle est la nature de D' ? Que constatez-vous ?
3. Représentation graphique de la droite D
   – Remplir le tableau ci-contre :

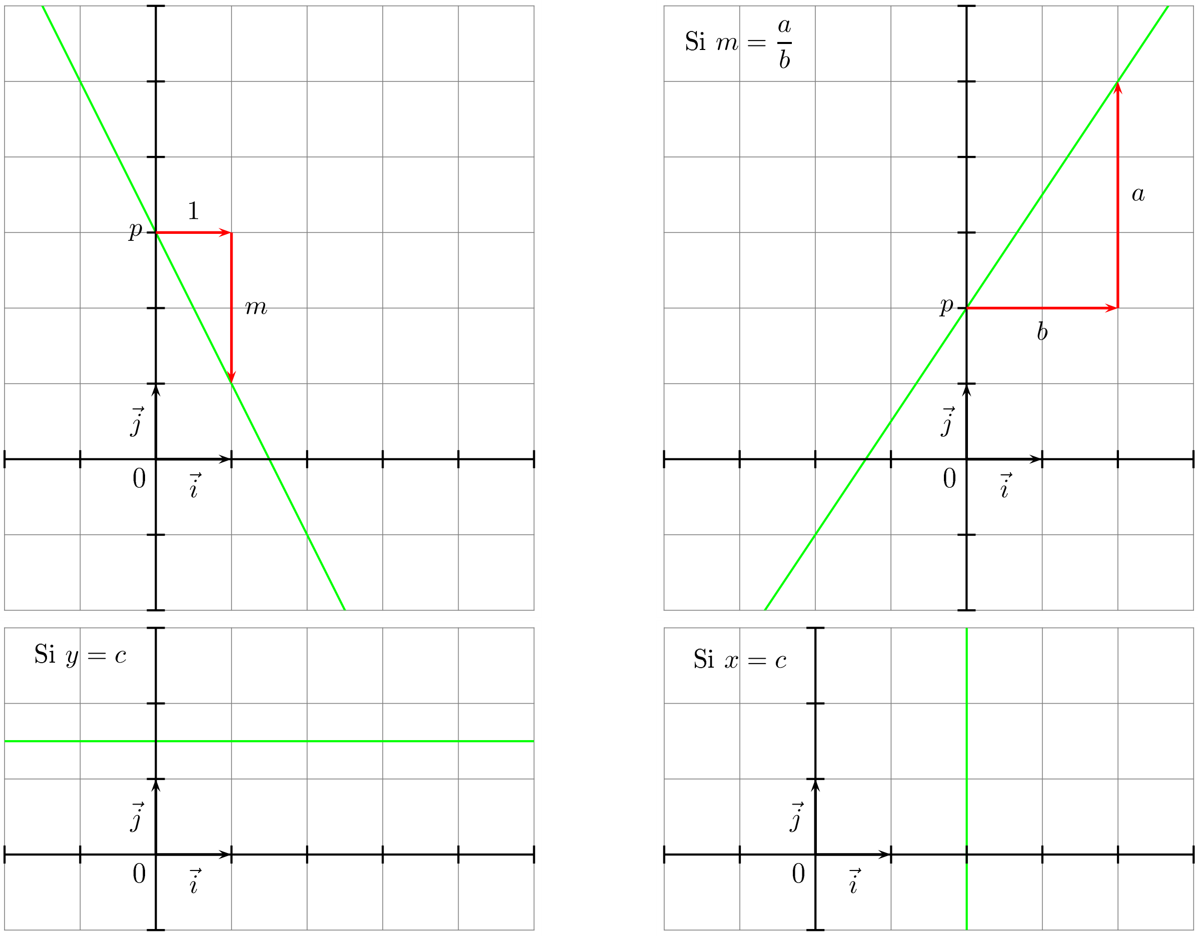
x	y

   Choisir x arbitrairement et calculer la valeur correspondante de y.

   – Déduire du tableau précédent deux points de la droite D et la représenter graphiquement (unité = 1 cm).
   – Comment faire apparaître sur le graphique l'ordonnée à l'origine de la droite D ? son coefficient directeur ?
4. Droites particulières :
   – Donner une équation de la droite D_1 parallèle à l'axe des abscisses, passant par le point $A(2; 3)$ (s'aider d'un dessin)
   – Même question pour D_2 parallèle à l'axe des ordonnées, passant par le point A.
   – Donner une équation de la droite D_3 parallèle à D et passant par l'origine du repère.

1.1 Équations de droites

Rappels :
Toute droite **non parallèle à l'axe des ordonnées** admet une équation du type $y = mx + p$.
Cette équation est appelée *équation réduite* de la droite. Elle est unique.
m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.
Un vecteur directeur de la droite est $\vec{u}(1; m)$.
Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation $x = c$.



Propriété 1. Deux droites du plan non parallèles à l'axe des ordonnées, sont parallèles entre elles si et seulement si elles ont même coefficient directeur.

Exemple : Les droites d'équations réduites $y = 345x - 4$ et $y = 345x + 79$ sont parallèles.

THÉORÈME 1. Soient a, b et c des réels tels que l'un au moins des nombres a ou b soit non nul.
L'ensemble D des points de coordonnées $(x; y)$ telles que $ax + by = c$ est une droite ;
$ax + by = c$ est *une équation* de D.
L'équation $ax + by = c$ admet donc une infinité de solutions, qui sont les coordonnées des points de la droite D.

Remarques :

– Une droite est associée à une infinité d'équations.

– Si $b \neq 0$, D a pour équation réduite $y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$ et n'est pas parallèle à l'axe (Oy) ; dans ce cas, si $a = 0$, D est parallèle à l'axe (Ox). et a pour équation $y = \dfrac{b}{c}$.
– Si $b = 0$ (donc $a \neq 0$), D a pour équation $x = \dfrac{c}{a}$ et est parallèle à l'axe (Oy).

Propriété 2. Si les équations des droites D et D' sont données respectivement par $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$, les droites D et D' sont parallèles ssi les coefficients a' et b' sont proportionnels aux coefficients a et b, autrement dit, ssi $ab' - a'b = 0$.
En particulier, les équations $ax + by = c$ et $ax + by = c'$ sont les équations de deux droites parallèles (confondues si $c = c'$, strictement parallèles si $c \neq c'$).

Exemples : Les droites d'équations $4x - 7y = 1$ et $-8x + 14y = 5$ sont parallèles.
Les droites d'équations $4x - 7y = 1$ et $-8x + 14y = -2$ sont confondues.

1.2 Représentation graphique de droites

Méthodes pour tracer la représentation graphique de la droite d'équation $ax+by = c$:

1. On détermine les coordonnées de deux points appartenant à la droite, on les place sur le graphique puis on les relie :
   – Soit on détermine un premier point en se fixant par exemple une valeur de x et en calculant la valeur de y correspondante dans l'équation donnée, et on procède de même pour un second point.
   – Soit, si $b \neq 0$, on trouve l'équation réduite de la droite et on utilise les tables de valeurs d'une calculatrice en entrant en Y1 la fonction définie par l'équation réduite.
   – Soit, si $b = 0$, la droite est parallèle à l'axe des ordonnées et passe par n'importe quel point d'abscisse c, par exemple le point de coordonnées $(c; 0)$
2. Sans calculer de coordonnées :
   – On place sur l'axe des ordonnées le point de coordonnées $(0; p)$, p étant l'ordonnées à l'origine de la droite,
   – On construit un deuxième point en utilisant le coefficient directeur de la droite.

Exercice 1.1. Dans le plan muni un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$, construire en variant les méthodes les droites D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7 et D_8 d'équations respectives :

$$D_1 : y = -x + 7 \quad ; \quad D_2 : y = 3x + 4 \quad ; \quad D_3 : -\frac{1}{2}x - 7 D_4 : x = 3$$

$$D_5 : -5x + y = -3 \quad ; \quad D_6 : 3x + 5y = -4 \quad ; \quad D_7 : x - 4y = 5 \quad ; \quad D_8 : 2x + 3y + 8 = 0$$

Hachette n°2 à 5 p51

<u>Exercice</u> 1.3. Dans le plan P muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, construire les droites D_1, D_2, D_3 et D_4 d'équations respectives :

$$y=-4 \qquad ; \qquad y=x \qquad ; \qquad y=\frac{5}{2}-2 \qquad ; \qquad y=\frac{-5x+3}{2}$$

1.3 Déterminer une équation de droite

<u>Travail de l'élève</u> : Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Placer les points $A(-1;1)$ et $B(2;2)$. Tracer la droite (AB).
2. Graphiquement dire si les points $C(5;3)$ et $D(0;1.3)$ semblent appartenir à la droite (AB).
3. Déterminer par le calcul l'équation réduite de la droite (AB), puis deux équations.
4. Dire si (AB) est la courbe représentative d'une fonction affine, et si oui de laquelle.
5. Vérifier par le calcul les réponse à la question 1.
6. Tracer la droite Δ parallèle à l'axe des abscisses passant par le point B.
7. Dire si les poits $G(-3;2;001)$, $H(0;\sqrt{4})$, $I(7565;2)$ et $J(2;6)$ appartiennent à Δ
8. Donner une équation de la droite Δ
9. Dire si Δ est la courbe représentative d'une fonction affine, et si oui de laquelle.
10. Tracer la droite Δ' parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point B.
11. Dire si les poits G, H, J et $K(2.001;6534)$ appartiennent à Δ'
12. Donner une équation de la droite Δ'
13. Dire si Δ' est la courbe représentative d'une fonction affine, et si oui de laquelle.

Propriété 3. Soient deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$. Le coefficient directeur de la droite (AB) est :
$$m=\frac{\text{Différence des ordonnées}}{\text{Différence des abscisses}}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$$

Méthodes pour déterminer une équation de droite :

1. Par lecture graphique :
   - On lit sur le graphique l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur.
2. Par le calcul :
   - On choisit deux points de la droite
   - On calcule le coefficient directeur de la droite grâce à la propriété ci-dessus
   - On remplace m par sa valeur trouvée dans l'équation $y=mx+p$,
   - On remplace dans l'équation ainsi obtenue x et y par les coordonnées d'un des deux points
   - On détermine alors p grâce à cette dernière équation.

Indice n°1 à 5 p72

Exercice 1.7. Donner une équation de la droite passant par A et de coefficient directeur m

- A confondu avec l'origine du repère et $m = \dfrac{1}{3}$
- $A(1;2)$ et $m = -3$
- $A(2;1)$ et $m = 5$
- $A(1;3)$ et $m = 0$

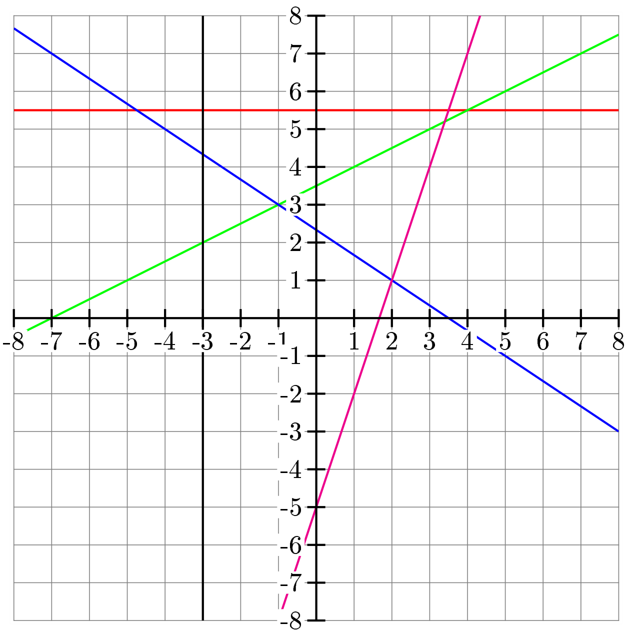
Exercice 1.8. Déterminer une équation des droites passant par les points A et B donnés :

- $A(1;1)$ et $B(-1;0)$
- $A(2;1)$ et $B(2;5)$
- $A(3;0)$ et $B(5;1)$
- $A(-4;1)$ et $B(0;2)$

Exercice 1.9. Soit d une droite de coeffidient directeur égal à 5. Trouver une équation réduite de la parallèle à d :
- passant par l'origine O du repère ;
- d'ordonnée à l'origine égale à 3 ;
- passant par le point $A(2;-3)$.

Hachette n°6 à 8 p51

Exercice 1.12. Déterminer une équation de chacune des droites représentées ci-dessous :



Exercice 1.13. Dans le plan P muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, déterminer une équation de la droite passant par les points $A(-1;3)$ et $B(6;1)$, puis une équation de la droite D parallèle à (AB) et passant par le point $C(7;-8)$.

2 Systèmes d'équations linéaires

Travail de l'élève :

1. **Méthode par substitution :** On se propose de résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$
   (a) Exprimer à l'aide de la première équation y en fonction de x.
   (b) Remplacer dans la deuxième équation y par l'expression obtenue.
   (c) Déterminer x, puis en déduire y.
   (d) Écrire l'ensemble des solutions

   Remarques :
   - Les rôles de x et de y sont symétriques (on peut exprimer x en fonction de y à la 1^{re} étape)
   - Les rôles des équations sont symétriques (on peut utiliser la 2^{me} équation dans la 1^{re} étape)

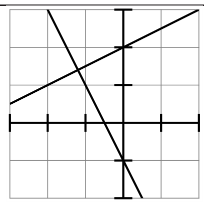
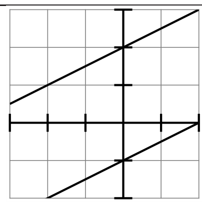
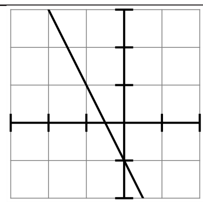
2. **Méthode par combinaison linéaire :** On se propose de résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x + 7y = -6 \end{cases}$
   (a) Multiplier la 1^{re} et la 2^{me} ligne par des nombres appropriés afin de faire apparaître des coefficients opposés devant le x
   (b) Additionner les deux lignes
   (c) On a obtenu une seule équation à d'inconnue y. Déterminer y
   (d) Remplacer y par sa valeur trouvée dans l'une des équations
   (e) On a obtenu une seule équation d'inconnue x. Déterminer x
   (f) Écrire l'ensemble des solutions.

   Remarques :
   - Après avoir trouver x, on peut refaire une combinaison linéaire pour trouver y
   - Les rôles de x et de y sont symétriques (on peut travailler sur les coefficients de y)

3. **Méthode graphique** On se propose de résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = -13 \end{cases}$
   À chaque équation du système, il est possible d'associer une droite. Graphiquement, les éventuels couples solutions sont les coordonnées des points communs à ces droites.
   (a) Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, tracer les droites appropriées
   (b) Déterminer alors graphiquement l'ensemble solution du système donné.

   Remarque : On peut anticiper le nombre de couples solutions d'un système du type : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x - b'y = c' \end{cases}$
   - Si $ab' - a'b \neq 0$, on sait que les droites associées ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un unique point de coordonnées $(x_0; y_0)$. Le système admet **un unique couple solution**.
   - Si $ab' - a'b = 0$ alors on sait que les droites associées sont parallèles. Soit elles sont strictement parallèles (a, b et c non proportionnels à a', b', et c') et le système n'admet **aucun couple solution** ; soit elles sont confondues (a, b et c proportionnels à a', b', et c') et le sytème admet une **infinité de couples solutions** (ceux qui vérifient l'équation de la droite)

Définition 1. On appelle le nombre $ab' - a'b$ le déterminant du système d'équations, car il permet de déterminer à l'avance le nombre de solutions du système.

Déterminant $\neq 0$	Déterminant $= 0$	
Les droites associées sont sécantes	Les droites associées sont strictement parallèles	Les droites associées sont confondues
		
Le système admet une unique solution	Le système n'admet aucune solution	Le système admet une infinité de solutions

Transmath n°1 à 29 p70

Exercice 2.1. Trouver le nombre de couples solutions des systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 4x-2y=1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 3x-y=2 \\ -6x+2y=-4 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x+y=-1 \\ -10x-5y=-5 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x-3y=3 \\ 4x-2y=10 \end{cases} \quad \dots$$

Exercice 2.2. Résoudre les systèmes d'équations suivants par substitution ou combinaison linéaire :

$$\begin{cases} 4x-3y=7 \\ 6x+y=-6 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x-3y=31 \\ 4x+5y=5 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 6x+2y=4 \\ -2x-y=1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} -2x-y=-6 \\ 100x-20y=-240 \end{cases}$$

Exercice 2.4. Résoudre graphiquement les systèmes d'équations suivants (le plan est rapporté à un repère) :

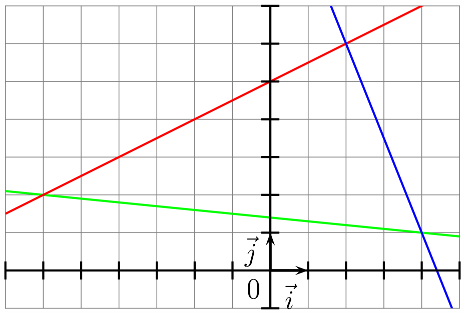
$$\begin{cases} x=-1 \\ x+y=-1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 3x-y=1 \\ y=2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} -9x+3y=0 \\ -x+\frac{1}{2}y=1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2.5x-5y=-200 \\ 10x+6y=500 \end{cases}$$

Indice n°6 et 7 p72 (Résolution algébrique de systèmes + Reconnaissance de 3 droites sur un graphique, puis résolution des système engendrés)

Exercice 2.5. Soient d_1, d_2 et d_3 les représentations graphiques de trois droites d'équations respectives : $d_1 : 5x+2y=22$; $d_2 : 2y-x=10$ et $d_3 : x+10y=14$

1. Reconnaître les trois droites sur le graphe ci-dessous.
2. À l'aide du graphique, résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} 5x+2y=22 \\ y=0.5x+5 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 0.5x+5=y \\ 10y=14-x \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y=-2.5x+11 \\ y=-0.1x+14 \end{cases}$$



Hachette n°11 à 18 p52 (Résolution de systèmes à deux et trois équations écrites sous diverses formes, trouver si trois droites sont concourantes)

Exercice 2.2. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} -x+3y+4=0 \\ 5x+2y-3=0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x+7=2y-3 \\ 4x+3y=0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x+5y=-1 \\ -3x+4y=-10 \\ x+2y=0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} -4x+7y=-20 \\ 2x+y=1 \\ 6x+2y=6 \end{cases}$$

Exercice 2.3. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations respectives $3x+4y-16=0$; $2x-2y+1=0$ et $-x+4y=8$.
Les droites sont-elles concourrantes ?

Exercice 2.4. La société Net Plus a mis en vente sur son site internet deux nouveaux téléphones portables.
Au cours du mois de juin, elle a vendu 25 modèles A et 45 modèles B pour un chiffre d'affaires de 6179 €.
Au cours du mois suivant, les ventes du modèle A ont progressé de 20% mais celles du modèle B ont chuté d'un tiers, pour un chiffre d'affaires ce mois-là de 4906 €. Déterminer le prix de chaque modèle.

Exercice 2.5. Une entreprise de travaux publics a dû acheter des gaines et des câbles pour réaliser le câblage informatique d'un lycée. Le chantier s'est déroulé en deux phases.
Lors de la première, elle a posé 200m de gaine et 600m de câble pour un coût de 660 €.
Lors de la deuxième phase, elle a posé 300m de gaine et 1200m de câble pour un coût de 1 155 €.

1. Les coût n'ont pas évolué entre les deux phases. Quels sont les prix d'un mètre de câble et d'un mètre de gaine ?
2. Les coût ont augmenté de 10% entre les deux phases. Quels étaient les prix d'un mètre de câble et d'un mètre de gaine lors de la première phase ?

Exercice 2.6. Il faut nettoyer les allées d'un espace vert. La remorque tractée du jardinier pèse à vide 50kg. Quand elle est remplie de feuilles, elle pèse 55kg, mais quand elle est remplie de glands, elle pèse 80kg.
Le jardinier a rempli et vidé 10 remorques, ce qui représente une masse totale de 112.5kg de déchets verts.
Quelles sont les masses respectives, exprimées en kg, de feuilles et de glands qu'il a ramassés ?

3 Régionnement du plan

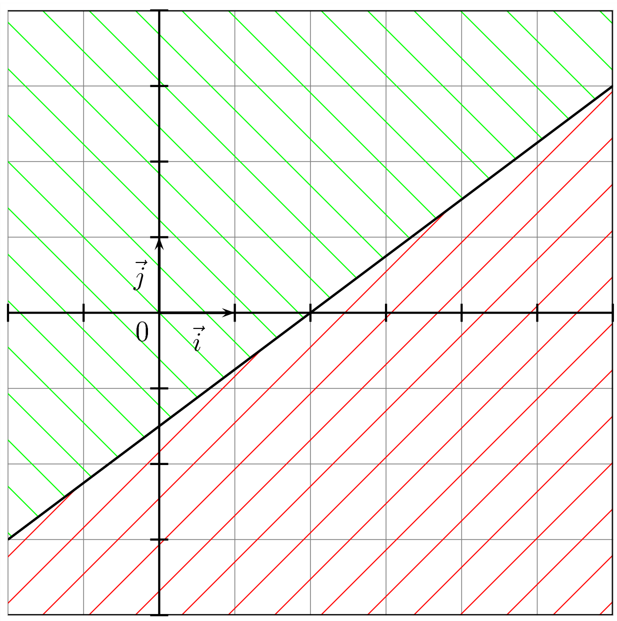
3.1 Avec une droite

Travail de l'élève : Soit d l'ensemble des points de coordonnées $(x;y)$ telles que $3x+2y=4$.

1. – Donner une équation réduite de la droite d.
   – Représenter graphique dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ cette droite (unité : 1cm).
2. On désigne par B l'ensemble des points de coordonnées $(x;y)$ telles que $3x+2y\geq 4$.
   – Tracer sur le graphique précédent l'ensemble des points de B, d'abscisse $x=0$.
   – Reprendre la question précédente, successivement pour $x=-4$, $x=-2$, $x=-1$, $x=1$ et $x=2$.
   – Conjecturer l'ensemble B en indiquant cet ensemble avec une couleur sur le graphique. On admet que votre conjecture est vérifiée.
3. Indiquer l'ensemble H des points de coordonnées $(x;y)$ telles que $3x+2y\leq 4$.

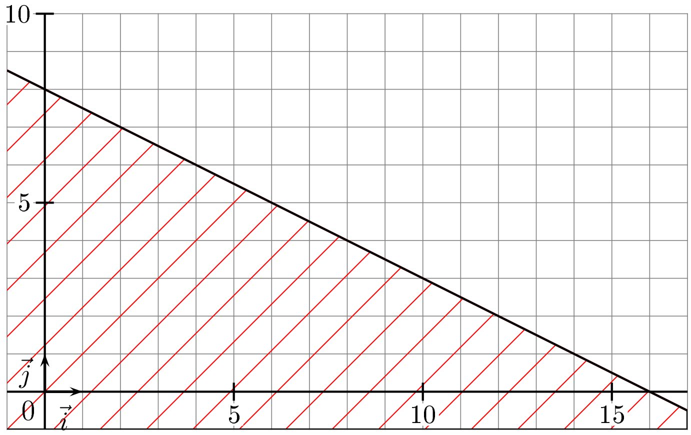
THÉORÈME 2. La droite d d'équation $ax+by=c$, partage le plan en deux demis-plans de **frontière** la droite d :
– Un demi-plan fermé P_1 contenant d, ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by\leq c$ (les coordonnées de M sont les solutions de cette inéquation)
– Un demi-plan fermé P_2 contenant d, ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by\geq c$ (les coordonnées de M sont les solutions de cette inéquation)
Si les inégalités sont strictes, les demis-plans ne contiennent pas d et sont des demis-plans ouverts.
On dit que chaque demi-plan est caractérisé par l'inéquation précédente.

Exemple :



Pour différencier ces demis-plans, on calcule la valeur $ax + by$ pour les coordonnées d'un point particulier non situé sur d et on le compare à c.

Exemple : Un artisan ébéniste fabrique chaque semaine x tables et y chaises de jardin en bois. Il vend les chaises 125 € et les tables 250 €. Pour que son entreprise soit rentable, il faut que le chiffre d'affaires hebdomadaire réalisé sur ces deux articles soit au moins égal à 200 €.Il faut donc que $125x + 250y \geq 2000$. On peut aussi écrire $x + 2y \geq 16$.
L'ensemble des couples $(x; y)$ solutions de l'inéquation $x + 2y \geq 16$ est repésenté par le demi-plan non hachuré situé "au dessus" de la droite d'équation $x + 2y = 16$.



Indice n°8 – 11 p72 (Résolution graphique d'inéquations)

Exercice 3.1.

1. Placer dans un repère orthonormal les points $A(2; -2)$, $B(-3; -1)$
2. Donner une équation de la droite (AB)
3. Donner une inéquation dont les solutions sont les coordonnées des points situés dans le demi-plan défini par la droite (AB) et contenant l'origine O.

Transmath n°30 à 56 p73 (Résolution graphique d'inéquations, reconnaissance graphique de demi-plans, pb d'entreprise)

Exercice 3.2. Résoudre graphiquement les inéquations

$$x \leq 3 \quad ; \quad x < 0 \quad ; \quad 3x \leq -6 \quad ; \quad 2x \geq 1 \quad ; \quad -x \geq 3 \quad ; \quad -2x > -4 \quad ; \quad -4x + 1 < 0$$

Exercice 3.3. Résoudre graphiquement les inéquations

$$y \leq -4 \quad ; \quad y > 0 \quad ; \quad 2y \geq -3 \quad ; \quad -y \leq 1 \quad ; \quad -3y + 9 > 0$$

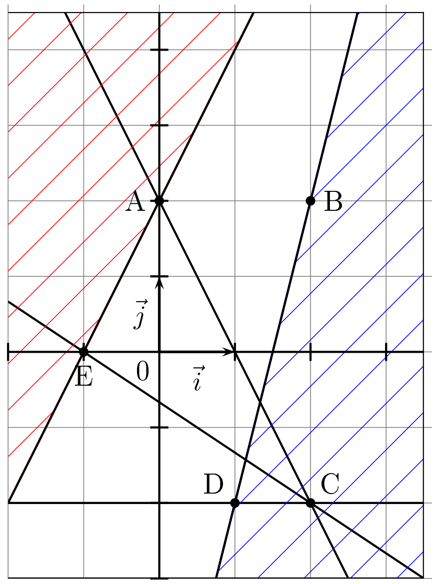
Exercice 3.4. Résoudre graphiquement les inéquations

$$5x+y \leq -3 \quad ; \quad x+y \geq -2 \quad ; \quad 2x-y > -1 \quad ; \quad -x+4y \leq 2 \quad ; \quad 10x+20y \geq 4000$$

$$-15x+60y \leq 900 \quad ; \quad 7x+y \leq 40 \quad ; \quad x-3y-1 \leq 0 \quad ; \quad 2x+y-3 \leq 0 \quad ; \quad y \leq -x-1 \quad ; \quad y > 3x+2$$

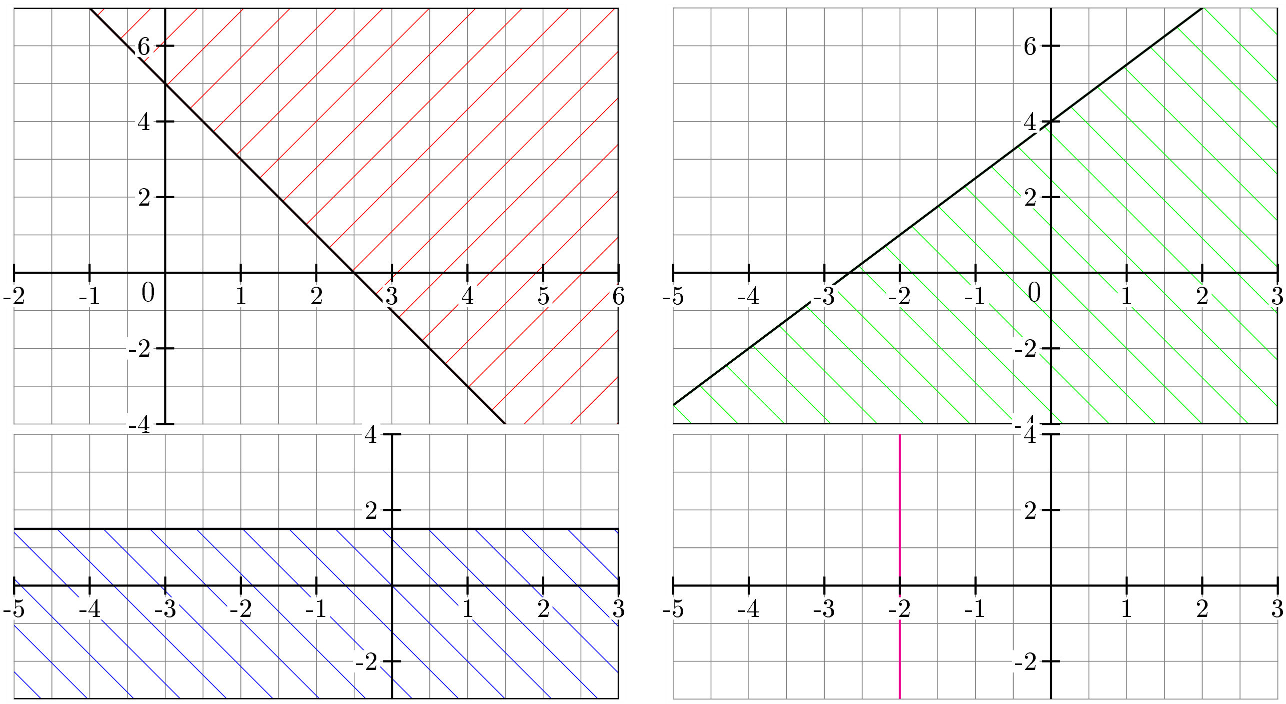
Exercice 3.5. Le plan est rapporté à un repère. On considère la figure suivante. Répondre sans justification par vrai ou par faux à chacune des six affirmations suivantes :

1. L'équation réduite de (EC) est $y = -x - 1$
2. $4x+y = 6$ est une équation de la droite (AC).
3. L'ensemble solution de $x > 2$ est l'ensemble des coordonnées des points du demi-plan situé “à gauche” de (BC), frontière incluse.
4. L'ensemble solution de $y > -2$ est l'ensemble des coordonnées des points du demi-plan situé “au dessus” de (DC), frontière exclue.
5. L'ensemble des solutions de $4x - y > 6$ est l'ensemble des coordonnées des points du demi-plan hachuré en bleu, frontière exclue.
6. L'ensemble des solutions de $y > 2x + 2$ est l'ensemble des coordonnées des points du demi-plan hachuré en rouge, frontière exclue.



Hachette n°19 et 24-27-28-30 à p53 (Résolution graphique d'inéquations, reconnaissance graphique de demis-plans, pb d'entreprise)

Exercice 3.6. Déterminer l'inéquation qui caractérise chacun des demi-plans non hachurés suivants :



3.2 Avec plusieurs droites

Travail de l'élève : Proposer une méthode pour résoudre le système d'inéquations suivants :

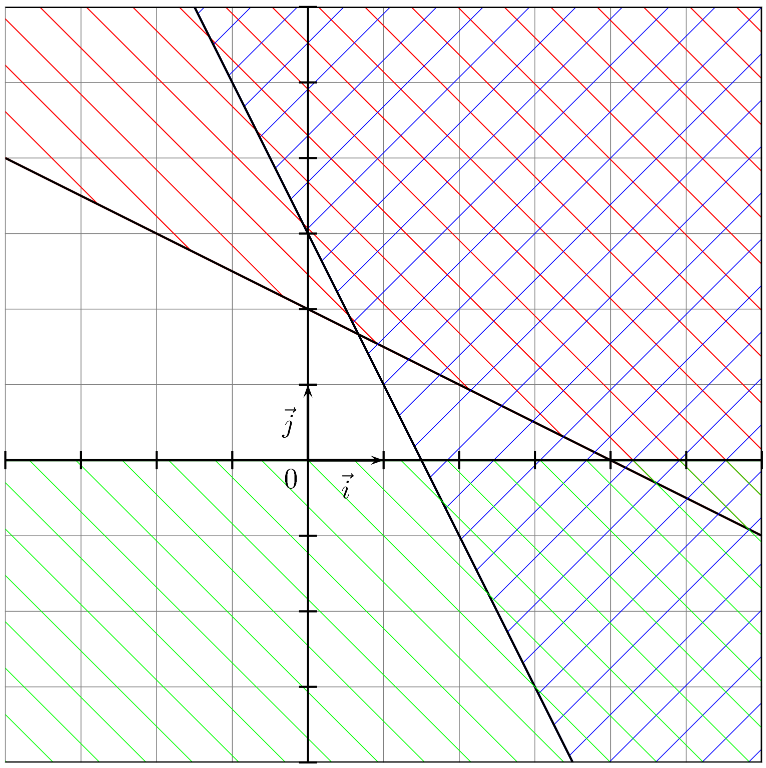
$$\begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ x + y \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Définition 2. Résoudre graphiquement un système d'inéquations I_1, I_2, ... linéaires à deux inconnues, signifie déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient simultanément les inéquations du système $\begin{cases} I_1 \\ I_2 \\ \ldots \end{cases}$.

On dit que cette région est caractérisée par le système d'inéquations précédent.

Le principe de résolution est semblable quel que soit le sens des inégalités.

Exemple :



La région non hachurée est caractérisée par le système d'inéquations linéaires : $\begin{cases} 0.5x + y \leq 2 \\ 2x + y \leq 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Transmath n°57 à 77 p 75 (Résolution graphique de systèmes d'inéquations, détermination graphique de systèmes)

Exercice 3.7. Résoudre graphiquement les systèmes d'inéquations suivants :

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ x + 2y \geq -1 \\ 2x - y \leq 3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x + y \leq 1 \\ x - y \geq -1 \\ 2x + y \leq 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Indice n°9−10 et 12 p 72 (Résolution graphique de systèmes d'inéquations, détermination graphique de systèmes)

Exercice 3.8.

1. Placer dans un repère orthonormal les points : $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;2)$ et $D(1;2)$.
2. Donner une équation des droites (AB), (BC) (CD) et (AD).
3. Donner un système d'inéquations dont les solutions sont les coordonnées des points situés à l'intérieur du rectangle $ABCD$.

Hachette n°20 à 23 p 53 + 25-26-29-31 (Résolution graphique de systèmes d'inéquations, détermination graphique de systèmes, pb)

Exercice 3.9. Placer dans un repère orthonormal les points : $A(2;-5)$, $B(8;-1)$, $C(4;3)$ Déterminer le système d'inéquations qui a pour solution l'intérieur du triangle ABC.

4 Optimisation

Travail de l'élève : Hachette TP3 p36

Un artisan potier et ses ouvriers fabriquent des plats en poteries de deux modèles :

- Le modèle A qui nécessite 500g de terre et 4 heures de travail ;
- Le modèle B qui nécessite 800g de terre et 3 heures de travail.

L'artisan dispose par semaine de 30kg de terre et lui et ses ouvriers fournissent au pus 170 heures de travail par semaine. Le four ne peut pas cuire plus de 45 plats par semaine.

On note x le nombre de plats du modèle A fabriqués par semaine et y ceux du modèle B. L'artisan réalise un bénéfice de 6 € par plat de modèle A vendu et 5 € par plat de modèle B. On admet que toute la production hebdomadaire est vendue. Il cherche à déterminer le nombre de plats de chaque modèle qu'il doti fabriquer chaque semaine pour réaliser un bénéfice maximal.

1. (a) Traduire par une inéquation les contraintes sur la quantité de terre.
   (b) Procéder de même pour les heures de travail.
   (c) Quelle est l'inéquation qui correspond à la contrainte liée à la cuisson dans le four ?
2. Expliquer pourquoi les couples $(x; y)$ qui conviennent sont solutions du systèmes : $\begin{cases} x \in \mathbb{N}\,;\, y \in \mathbb{N} \\ 5x + 8y \leq 300 \\ 4x + 3y \leq 170 \\ x + y \leq 45 \end{cases}$
3. (a) Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 2cm pour 5 plats) résoudre graphiquement le système précédent (on hachurera les parties qui ne conviennent pas).

   À savoir : La partie du plan qui apparaît non hachurée sur le graphique est appelée **domaine** ou **polygone des contraintes**, ou **domaine des solutions admissibles**.

   (b) Parmi les couples suivantes, dire ceux qui vérifient l'ensemble des contraintes :
   $(15; 10)$; $(30; 20)$; $(12; 35)$; $(35; 10)$; $(23; 18)$; $(13.5; 15)$

   Pour les autres, préciser quelles contraintes ne sont pas vérifiées.
4. On note $R(x; y)$ le bénéfice réalisé par la vente de x modèles A et y de modèles B.
   (a) Écrire $R(x; y)$ en fonction de x et de y.
   (b) En déduire y en fonction de x et de $R(x; y)$.
   (c) Soit d la droite contenant les points $M(x; y)$ vérifiant l'équation trouvée au (b). Quel est son coefficent directeur ? Son ordonnée à l'origine ?
5. (a) Sur le dessin précédent, tracer la droite d_{150} correspondant à un bénéfice de 150 €.
   (b) Citer un couple $(x; y)$ vérifiant cette condition et solution du système
   (c) Tracer la droite d_{200} correspondant à un bénéfice de 200 €
   (d) Que peut-on dire des droites d_{150} et d_{200}. Ce résultat était-il prévisible ?
   (e) Déterminer graphiquement la droite permettant de réaliser le bénéfice maximal.
   (f) Déterminer par le calcul le couple solution du système : $\begin{cases} 4x + 3y = 170 \\ x + y = 45 \end{cases}$
   (g) Déterminer le bénéfice maximal.

La programmation linéaire consiste à chercher à optimiser, c'est-à-dire à rendre le plus grand possible (ou le plus petit possible) une fonction linéaire à plusieurs inconnues, sous certaines conditions, appelées contraintes.

Exemple : On cherchera à rendre un bénéfice le plus grand possible, tandis qu'on cherchera à rendre un coût le plus petit possible . Cela revient à chercher toutes les solutions (pour nous des couples $(x; y)$, coordonnées de points) vérifiant certaines conditions, exprimées sous forme d'inéquations.

Pour résoudre un problème de programmation linéaire à deux variables x et y

1. (a) On choisit les inconnues x et y
   (b) On traduit les contraintes du problème par un systéme d'inéquations linéaires aux inconnues x et y.
   (c) On représente le domaine des contraintes, région du plan (rapporté à un repère) caractérisée par le système précédent.
2. (a) On écrit l'expression $ax + by$ à optimiser.
   (b) – On trace une droite d'équation $ax + by = k$ pour une valeur quelconque de k ;
   – On trace la droite parallèle à la précédente, qui à l'ordonnée à l'origine minimale ou maximale (selon le problème posé) et au moins un point commun avec le domaine des contraintes représenté
   – On détermine les coordonnées d'un tel point, pour lesquelles la valeur $ax + by$ est minimale ou maximale (selon le problème posé).

Exercice 4.1. La situation 3 de la première partie

Transmath n°82 à 85 p 78 (le domaine des contraintes est représenté) + n°86 – 88 – 90 p 81 (TP Excel) + n°92 – 96 – 100 – 102 – 103 p 86 (type Bac)

Indice n°13 à 19 p 73 TP Excel p 78 tres bien!!!

Hachette TP 3-2 p 37 sur geoplan + TP4 p 41 sur Excel tres bien!!!!!!!! + n°32 à 39 p 55 (type Bac et autres)

Les Annexes

Activité 1 : Rappels sur les équations de droites

On appelle D l'ensemble des points de coordonnées $(x;y)$ telles que $3x-2y=4$ et D' l'ensemble des points de coordonnées $(x;y)$ telles que $-9x+6y=-12$.

1. Étude de la nature de D.
   - Parmi les couples suivants, indiquer ceux qui appartiennent á l'ensemble D. :

$$(1;1) \qquad ; \qquad (0;-2) \qquad ; \qquad \left(\frac{2}{3};1\right) \qquad ; \qquad (1.5;0.25)$$

   - Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.
     Montrer que l'équation $3x-2y=4$ est en fait l'équation d'une droite, non paralléle à l'axe des ordonnées, que l'on précisera.
   - En déduire le nombre de points appartenant à D et sa nature géométrique.
2. Quelle est la nature de D' ? Que constatez-vous ?
3. Représentation graphique de la droite D
   - Remplir le tableau ci-contre :

x	y

Choisir x arbitrairement et calculer la valeur correspondante de y.

   - Déduire du tableau précédent deux points de la droite D et la représenter graphiquement (unité = 1 cm).
   - Comment faire apparaître sur le graphique l'ordonnée à l'origine de la droite D ? son coefficient directeur ?
4. Droites particulières :
   - Donner une équation de la droite D_1 parallèle à l'axe des abscisses, passant par le point $A(2;3)$ (s'aider d'un dessin)
   - Même question pour D_2 parallèle à l'axe des ordonnées, passant par le point A.
   - Donner une équation de la droite D_3 parallèle à D et passant par l'origine du repère.

Activité 2 : Représenter graphiquement une droite

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1. Placer les points $A(-1;1)$ et $B(2;2)$. Tracer la droite (AB).
2. Graphiquement dire si les points $C(5;3)$ et $D(0;1.3)$ semblent appartenir à la droite (AB).
3. Déterminer par le calcul l'équation réduite de la droite (AB), puis deux équations.
4. Dire si (AB) est la courbe représentative d'une fonction affine, et si oui de laquelle.
5. Vérifier par le calcul les réponse à la question 1.
6. Tracer la droite Δ parallèle à l'axe des abscisses passant par le point B.
7. Dire si les poits $G(-3;2;001)$, $H(0;\sqrt{4})$, $I(7565;2)$ et $J(2;6)$ appartiennent à Δ
8. Donner une équation de la droite Δ
9. Dire si Δ est la courbe représentative d'une fonction affine, et si oui de laquelle.
10. Tracer la droite Δ' parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point B.
11. Dire si les poits G, H, J et $K(2.001;6534)$ appartiennent à Δ'
12. Donner une équation de la droite Δ'
13. Dire si Δ' est la courbe représentative d'une fonction affine, et si oui de laquelle.

Fiche 1 d'exercices : Droites et équations

Exercice 1.1. Dans le plan muni un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, construire en variant les méthodes les droites D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7 et D_8 d'équations respectives :

$$D_1 : y = -x + 7 \quad ; \quad D_2 : y = 3x + 4 \quad ; \quad D_3 : -\frac{1}{2}x - 7 D_4 : x = 3$$

$$D_5 : -5x + y = -3 \quad ; \quad D_6 : 3x + 5y = -4 \quad ; \quad D_7 : x - 4y = 5 \quad ; \quad D_8 : 2x + 3y + 8 = 0$$

Exercice 1.2. Dans le plan P muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, construire les droites D_1, D_2, D_3 et D_4 d'équations respectives :

$$y = -4 \quad ; \quad y = x \quad ; \quad y = \frac{5}{2} - 2 \quad ; \quad y = \frac{-5x+3}{2}$$

Exercice 1.3. Dans le plan P muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, construire les droites D_1, D_2, D_3 et D_4 d'équations respectives :

$$y = -3x + 8 \quad ; \quad y = 2x \quad ; \quad y = -\frac{4}{3}x + 5 \quad ; \quad x = 6$$

Exercice 1.4. Dans le plan P muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, construire les droites D_1, D_2, D_3 et D_4 d'équations respectives :

$$x - 2y + 6 = 0 \quad ; \quad 4x - 3y = 7 \quad ; \quad 3x + y + 2 = 0 \quad ; \quad x + y = 0$$

Exercice 1.5. Dans le plan P muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, construire les droites D_1, D_2, D_3 et D_4 d'équations respectives :

$$3x + 4y - 6 = 0 \quad ; \quad 3x - 4y = 7 \quad ; \quad -3x + 5y + 2 = 0 \quad ; \quad 3x + 5 = 0$$

Exercice 1.6. Déterminer le coefficient directeur, puis une équation des droites (AB) avec :

- $A(0.5;5)$ et $B(0;0)$
- $A(0;2)$ et $B(-3;0)$
- $A(2;1)$ et $B(4;-5)$
- $A(-4;1)$ et $B(3;-1)$

Exercice 1.7. Donner une équation de la droite passant par A et de coefficient directeur m

- A confondu avec l'origine du repère et $m = \frac{1}{3}$
- $A(1;2)$ et $m = -3$
- $A(2;1)$ et $m = 5$
- $A(1;3)$ et $m = 0$

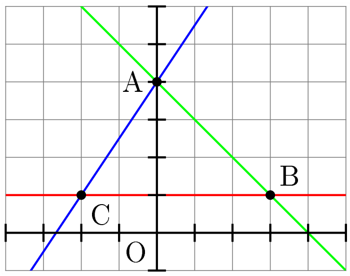
Exercice 1.8. Déterminer une équation des droites passant par les points A et B donnés :

- $A(1;1)$ et $B(-1;0)$
- $A(2;1)$ et $B(2;5)$
- $A(3;0)$ et $B(5;1)$
- $A(-4;1)$ et $B(0;2)$

Exercice 1.9. Soit d une droite de coeffidient directeur égal à 5. Trouver une équation réduite de la parallèle à d :

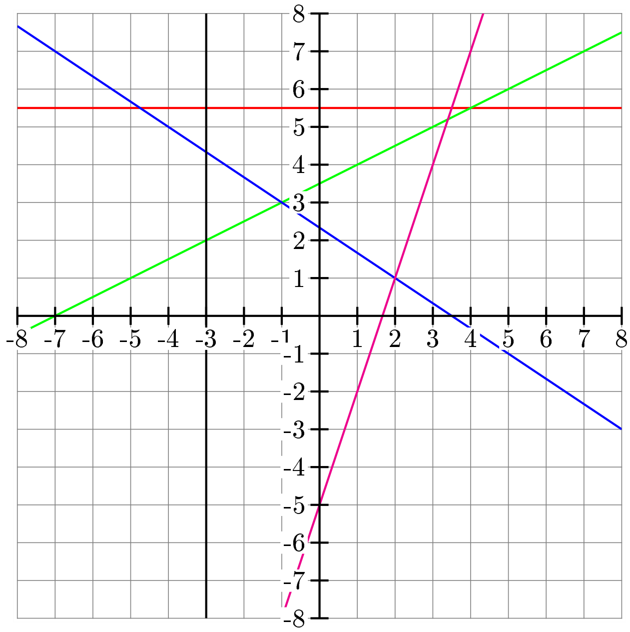
- passant par l'origine O du repère ;
- d'ordonnée à l'origine égale à 3 ;
- passant par le point $A(2;-3)$.

Exercice 1.10. Lire sur le graphique une équation des droites (OA) ; (OB) ; (OC) ; (AB) ; (AC) ; (BC)



Exercice 1.11. Dans le plan P muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, la droite D a pour équation $5x-7y+15=0$. Déterminer une équation de la droite D' parallèle à D et passant par le point $A(-5;6)$.

Exercice 1.12. Déterminer une équation de chacune des droites représentées ci-dessous :



Exercice 1.13. Dans le plan P muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, déterminer une équation de la droite passant par les points $A(-1;3)$ et $B(6;1)$, puis une équation de la droite D parallèle à (AB) et passant par le point $C(7;-8)$.

Rappels sur les différentes méthodes de résolutions d'un système

1. **Méthode par substitution :** On se propose de résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$

   (a) Exprimer à l'aide de la première équation y en fonction de x.

   (b) Remplacer dans la deuxième équation y par l'expression obtenue.

   (c) Déterminer x, puis en déduire y.

   (d) Écrire l'ensemble des solutions

   Remarques :

   – Les rôles de x et de y sont symétriques (on peut exprimer x en fonction de y à la 1^{re} étape)

   – Les rôles des équations sont symétriques (on peut utiliser la 2^{me} équation dans la 1^{re} étape)

2. **Méthode par combinaison linéaire :** On se propose de résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x + 7y = -6 \end{cases}$

   (a) Multiplier la 1^{re} et la 2^{me} ligne par des nombres appropriés afin de faire apparaître des coefficients opposés devant le x

   (b) Additionner les deux lignes

   (c) On a obtenu une seule équation à d'inconnue y. Déterminer y

   (d) Remplacer y par sa valeur trouvée dans l'une des équations

   (e) On a obtenu une seule équation d'inconnue x. Déterminer x

   (f) Écrire l'ensemble des solutions.

   Remarques :

   – Après avoir trouver x, on peut refaire une combinaison linéaire pour trouver y

   – Les rôles de x et de y sont symétriques (on peut travailler sur les coefficients de y)

3. **Méthode graphique** On se propose de résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = -13 \end{cases}$

   À chaque équation du système, il est possible d'associer une droite. Graphiquement, les éventuels couples solutions sont les coordonnées des points communs à ces droites.

   (a) Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, tracer les droites appropriées

   (b) Déterminer alors graphiquement l'ensemble solution du système donné.

   Remarque : On peut anticiper le nombre de couples solutions d'un système du type : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x - b'y = c' \end{cases}$

   – Si $ab' - a'b \neq 0$, on sait que les droites associées ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un unique point de coordonnées $(x_0; y_0)$. Le système admet **un unique couple solution**.

   – Si $ab' - a'b = 0$ alors on sait que les droites associées sont parallèles. Soit elles sont strictement parallèles (a, b et c non proportionnels à a', b', et c') et le système n'admet **aucun couple solution** ; soit elles sont confondues (a, b et c proportionnels à a', b', et c') et le sytème admet une **infinité de couples solutions** (ceux qui vérifient l'équation de la droite)

Optimisation

Un artisan potier et ses ouvriers fabriquent des plats en poteries de deux modèles :

- Le modèle A qui nécessite 500g de terre et 4 heures de travail ;
- Le modèle B qui nécessite 800g de terre et 3 heures de travail.

L'artisan dispose par semaine de 30kg de terre et lui et ses ouvriers fournissent au pus 170 heures de travail par semaine. Le four ne peut pas cuire plus de 45 plats par semaine.

On note x le nombre de plats du modèle A fabriqués par semaine et y ceux du modèle B. L'artisan réalise un bénéfice de 6 € par plat de modèle A vendu et 5 € par plat de modèle B. On admet que toute la production hebdomadaire est vendue. Il cherche à déterminer le nombre de plats de chaque modèle qu'il doti fabriquer chaque semaine pour réaliser un bénéfice maximal.

1. (a) Traduire par une inéquation les contraintes sur la quantité de terre.

   (b) Procéder de même pour les heures de travail.

   (c) Quelle est l'inéquation qui correspond à la contrainte liée à la cuisson dans le four ?

2. Expliquer pourquoi les couples $(x;y)$ qui conviennent sont solutions du systèmes : $\begin{cases} x \in \mathbb{N}\,;\, y \in \mathbb{N} \\ 5x+8y \leq 300 \\ 4x+3y \leq 170 \\ x+y \leq 45 \end{cases}$

3. (a) Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2cm pour 5 plats) résoudre graphiquement le système précédent (on hachurera les parties qui ne conviennent pas).

   À savoir : La partie du plan qui apparaît non hachurée sur le graphique est appelée **domaine** ou **polygone des contraintes**, ou **domaine des solutions admissibles**.

   (b) Parmi les couples suivantes, dire ceux qui vérifient l'ensemble des contraintes :

   $(15;10)$; $(30;20)$; $(12;35)$; $(35;10)$; $(23;18)$; $(13.5;15)$

   Pour les autres, préciser quelles contraintes ne sont pas vérifiées.

4. On note $R(x;y)$ le bénéfice réalisé par la vente de x modèles A et y de modèles B.

   (a) Écrire $R(x;y)$ en fonction de x et de y.

   (b) En déduire y en fonction de x et de $R(x;y)$.

   (c) Soit d la droite contenant les points $M(x;y)$ vérifiant l'équation trouvée au (b). Quel est son coefficent directeur ? Son ordonnée à l'origine ?

5. (a) Sur le dessin précédent, tracer la droite d_{150} correspondant à un bénéfice de 150 €.

   (b) Citer un couple $(x;y)$ vérifiant cette condition et solution du système

   (c) Tracer la droite d_{200} correspondant à un bénéfice de 200 €

   (d) Que peut-on dire des droites d_{150} et d_{200}. Ce résultat était-il prévisible ?

   (e) Déterminer graphiquement la droite permettant de réaliser le bénéfice maximal.

   (f) Déterminer par le calcul le couple solution du système : $\begin{cases} 4x+3y=170 \\ x+y=45 \end{cases}$

   (g) Déterminer le bénéfice maximal.

Fiche 2 d'exercices : Systèmes

Exercice 2.1. Trouver le nombre de couples solutions des systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 4x-2y=1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x-y=2 \\ -6x+2y=-4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x+y=-1 \\ -10x-5y=-5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x-3y=3 \\ 4x-2y=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x+2y=-6 \\ 6x-4y=4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x+0.5y=2 \\ -3x+y=-6 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y=-1 \\ 3x+y=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x+2y=-10 \\ -12x-4y=20 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x+2y=-1 \\ -1.5x-1.5y=-0.75 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x-5y=15 \\ -2x+10y=-30 \end{cases}$$

Exercice 2.2. Résoudre les systèmes d'équations suivants par substitution :

$$\begin{cases} 4x-3y=7 \\ 6x+y=-6 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x-3y=31 \\ 4x+5y=5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 6x+2y=4 \\ -2x-y=1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -2x-y=-6 \\ 100x-20y=-240 \end{cases}$$

Exercice 2.3. Résoudre les systèmes d'équations suivants par combinaison linéaire :

$$\begin{cases} 5+2y=5 \\ 3x-7y=44 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x-2y=-1 \\ -10x+3y=-4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x-5y=-1 \\ -2x+2.5y=-1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 40x-10y=700 \\ x+2y=-50 \end{cases}$$

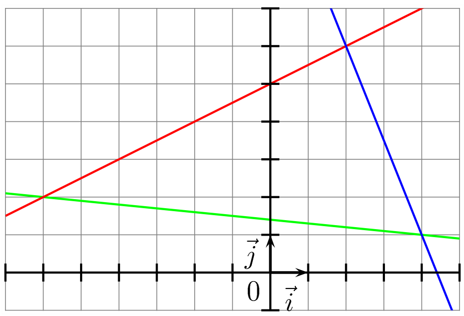
Exercice 2.4. Résoudre graphiquement les systèmes d'équations suivants (le plan est rapporté à un repère) :

$$\begin{cases} x=-1 \\ x+y=-1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x-y=1 \\ y=2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -9x+3y=0 \\ -x+\frac{1}{2}y=1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2.5x-5y=-200 \\ 10x+6y=500 \end{cases}$$

Exercice 2.5. Soient d_1, d_2 et d_3 les représentations graphiques de trois droites d'équations respectives : $d_1 : 5x+2y=22 \quad ; \quad d_2 : 2y-x=10 \quad ; \quad d_3 : x+10y=14$

1. Reconnaître les trois droites sur le graphe ci-dessous.
2. À l'aide du graphique, résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} 5x+2y=22 \\ y=0.5x+5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 0.5x+5=y \\ 10y=14-x \end{cases} ; \quad \begin{cases} y=-2.5x+11 \\ y=-0.1x+14 \end{cases}$$



Fiche 3 d'exercices : Régionnement du plan

Exercice 3.1.

1. Placer dans un repère orthonormal les points $A(2;-2)$, $B(-3;-1)$
2. Donner une équation de la droite (AB)
3. Donner une inéquation dont les solutions sont les coordonnées des points situés dans le demi-plan défini par la droite (AB) et contenant l'origine O.

Exercice 3.2. Résoudre graphiquement les inéquations

$$x \leq 3 \quad ; \quad x < 0 \quad ; \quad 3x \leq -6 \quad ; \quad 2x \geq 1 \quad ; \quad -x \geq 3 \quad ; \quad -2x > -4 \quad ; \quad -4x + 1 < 0$$

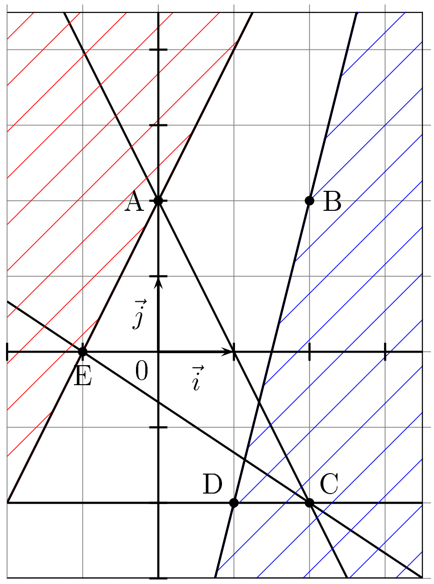
$$y \leq -4 \quad ; \quad y > 0 \quad ; \quad 2y \geq -3 \quad ; \quad -y \leq 1 \quad ; \quad -3y + 9 > 0$$

$$5x+y \leq -3 \quad ; \quad x+y \geq -2 \quad ; \quad 2x-y > -1 \quad ; \quad -x+4y \leq 2 \quad ; \quad 10x+20y \geq 4000$$

$$-15x+60y \leq 900 \quad ; \quad 7x+y \leq 40 \quad ; \quad x-3y-1 \leq 0 \quad ; \quad 2x+y-3 \leq 0 \quad ; \quad y \leq -x-1 \quad ; \quad y > 3x+2$$

Exercice 3.3. Le plan est rapporté à un repère. On considère la figure suivante. Répondre sans justification par vrai ou par faux à chacune des six affirmations suivantes :

1. L'équation réduite de (EC) est $y = -x - 1$
2. $4x+y = 6$ est une équation de la droite (AC).
3. L'ensemble solution de $x > 2$ est l'ensemble des coordonnées des points du demi-plan situé "à gauche" de (BC), frontière incluse.
4. L'ensemble solution de $y > -2$ est l'ensemble des coordonnées des points du demi-plan situé "au dessus" de (DC), frontière exclue.
5. L'ensemble des solutions de $4x - y > 6$ est l'ensemble des coordonnées des points du demi-plan hachuré en bleu, frontière exclue.
6. L'ensemble des solutions de $y > 2x + 2$ est l'ensemble des coordonnées des points du demi-plan hachuré en rouge, frontière exclue.



Exercice 3.4. Résoudre graphiquement les systèmes d'inéquations suivants :

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ x + 2y \geq -1 \\ 2x - y \leq 3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x + y \leq 1 \\ x - y \geq -1 \\ 2x + y \leq 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Exercice 3.5.

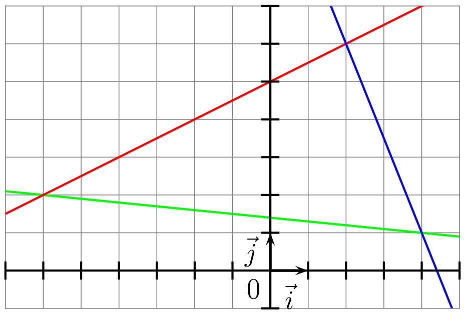
1. Placer dans un repère orthonormal les points : $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;2)$ et $D(1;2)$.
2. Donner une équation des droites (AB), (BC) (CD) et (AD).
3. Donner un système d'inéquations dont les solutions sont les coordonnées des points situés à l'intérieur du rectangle $ABCD$.

Fiche 2 d'exercices : Systèmes et Régionnement

Exercice 2.1. Soient d_1, d_2 et d_3 les représentations graphiques de trois droites d'équations respectives : $d_1 : 5x + 2y = 22$; $d_2 : 2y - x = 10$; $d_3 : x + 10y = 14$

1. Reconnaître les trois droites sur le graphe ci-dessous.
2. À l'aide du graphique, résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 22 \\ y = 0.5x + 5 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 0.5x + 5 = y \\ 10y = 14 - x \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y = -2.5x + 11 \\ y = -0.1x + 14 \end{cases}$$



Exercice 2.2. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} -x + 3y + 4 = 0 \\ 5x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x + 7 = 2y - 3 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ -3x + 4y = -10 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} -4x + 7y = -20 \\ 2x + y = 1 \\ 6x + 2y = 6 \end{cases}$$

Exercice 2.3. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations respectives $3x + 4y - 16 = 0$; $2x - 2y + 1 = 0$ et $-x + 4y = 8$.
Les droites sont-elles concourrantes ?

Exercice 2.4. La société Net Plus a mis en vente sur son site internet deux nouveaux téléphones portables. Au cours du mois de juin, elle a vendu 25 modèles A et 45 modèles B pour un chiffre d'affaires de 6179 €. Au cours du mois suivant, les ventes du modèle A ont progressé de 20% mais celles du modèle B ont chuté d'un tiers, pour un chiffre d'affaires ce mois-là de 4906 €.
Déterminer le prix de chaque modèle.

Exercice 2.5. Une entreprise de travaux publics a dû acheter des gaines et des câbles pour réaliser le câblage informatique d'un lycée. Le chantier s'est déroulé en deux phases.
Lors de la première, elle a posé 200m de gaine et 600m de câble pour un coût de 660 €.
Lors de la deuxième phase, elle a posé 300m de gaine et 1200m de câble pour un coût de 1 155 €.

1. Les coût n'ont pas évolué entre les deux phases. Quels sont les prix d'un mètre de câble et d'un mètre de gaine ?
2. Les coût ont augmenté de 10% entre les deux phases. Quels étaient les prix d'un mètre de câble et d'un mètre de gaine lors de la première phase ?

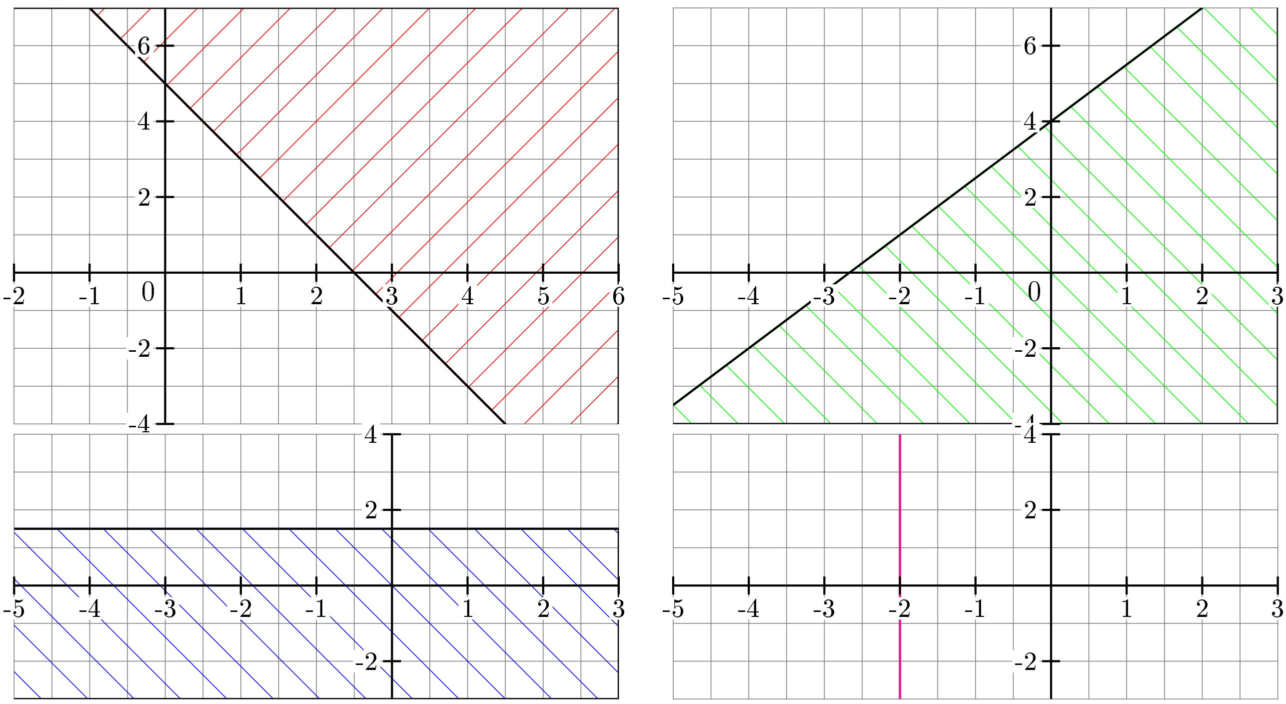
Exercice 2.6. Il faut nettoyer les allées d'un espace vert. La remorque tractée du jardinier pèse à vide 50kg. Quand elle est remplie de feuilles, elle pèse 55kg, mais quand elle est remplie de glands, elle pèse 80kg. Le jardinier a rempli et vidé 10 remorques, ce qui représente une masse totale de 112.5kg de déchets verts. Quelles sont les masses respectives, exprimées en kg, de feuilles et de glands qu'il a ramassés ?

Exercice 2.7. Les habitants du square de Beauvillage ont aperçu dimanche 7 cigognes, des merles et des pies. Ils ont dénombré en tout 32 oiseaux. Le lendemain, les cigognes étaient parties, mais les habitants ont compté deux fois plus de merles et trois fois moins de pies que la veille. Ils ont vu en tout 25 oiseaux. Combien y avait-il de merles et de pies dans le square de Beauvillage ce dimanche ?

Exercice 3.1.

1. Placer dans un repère orthonormal les points $A(2;-2)$, $B(-3;-1)$
2. Donner une équation de la droite (AB)
3. Donner une inéquation dont les solutions sont les coordonnées des points situés dans le demi-plan défini par la droite (AB) et contenant l'origine O.

Exercice 3.2. Déterminer l'inéquation qui caractérise chacun des demi-plans non hachurés suivants :



Exercice 3.3.

1. Placer dans un repère orthonormal les points : $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;2)$ et $D(1;2)$.
2. Donner une équation des droites (AB), (BC) (CD) et (AD).
3. Donner un système d'inéquations dont les solutions sont les coordonnées des points situés à l'intérieur du rectangle $ABCD$.

Exercice 3.4. Placer dans un repère orthonormal les points : $A(2;-5)$, $B(8;-1)$, $C(4;3)$ Déterminer le système d'inéquations qui a pour solution l'intérieur du triangle ABC.