# Chapitre 6 : Fonctions Logarithme Népérien

D. Zancanaro et C. Aupérin

2008-2009

"Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous" Thurston Moore

Dernière modification : 11 mars 2009

# Table des matières

**COURS : FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN**

# 1 Un peu d'histoire

*Travail de l'élève :* Au $XVI^{\text{ème}}$, les calculs en astronomie et en navigation ont engendré des calculs extrêmement compliqués. De nombreux mathématiciens ont alors essayé de simplifer les calculs. L'idée était de remplacer les multiplications par les additions.
Le plus célèbre de ces mathématiciens, John Néper, un écossais, publia en 1614 une table de calcul, dont voici un extrait :

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2 | 0.69315 |
| 3 | 1.09861 |
| 4 | 1.38629 |
| 5 | 1.60944 |
| 6 | 1.79176 |
| 7 | 1.94591 |
| 8 | 2.07944 |
| 9 | 2.19722 |
| 10 | 2.30259 |
| 11 | 2.39790 |
| 12 | 2.48491 |
| 13 | 2.56495 |
| 14 | 2.63906 |
| 15 | 2.70805 |
| 16 | 2.77259 |

1. (a) Calculer $f(2) + f(3)$
   (b) Comparer avec $f(6)$
   (c) Procéder de même avec $f(4)$ et $f(3)$.
   (d) Conjectuer la formule dans le cas général.
   (e) Si cette propriété peut être généralisée à tout réel strictement positif, quelle sont les valeurs de $f(24)$ (on fera le calcul de deux manière différentes) ? et de $f(35)$ ?
2. Soit $a$ un réel strictement positif. En écrivant $a = a \times 1$, déterminer $f(1)$.
3. (a) Que peut-on dire des nombres 1, 2, 4, 8, 16 ?
   (b) Que peut-on dire des nombres $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(8)$ et $f(16)$ ?
   (c) Écrire $f(16)$ en fonction de $f(2)$.
   (d) Que peut-on conjecturer pour $f(2^n)$ (où $n$ est un entier naturel) ?
   (e) En supposant que cette propriété peut être généralisée à tout réel strictement positif, écrire :
   – $f(25)$ en fonction de $f(5)$ ;
   – $f(81)$ en fonction de $f(9)$ ;
   – $f(81)$ en fonction de $f(3)$ ;

On admettra l'existence d'une fonction $f$, définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, telle que :

**Pour tous réels $a$ et $b$ strictement positifs, on a :** . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Neper a appelé cette fonction : **Logarithme**

<u>Conséquence</u> : $f(\dots) = f(1 \times 1) = f(\dots) + f(\dots)$. On en déduit que . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

*Travail de l'élève :* On remarque sur la calculatrice une fonction notée *ln*. Regardons si elle correspond bien à la fonction imaginée par Neper. *On arrondira tous les résultats de l'activité à* $10^{-5}$.

1. (a) À l'aide de la touche *ln* de votre calculatrice, répondre aux question suivantes
   i. Déterminer les images par la fonction *ln* des réels : 0.1 ; 0.5 ; 1 ; 2 ; 5 ; 1000 et $10^{25}$
   ii. Que se passe-t-il quand on veut calculer les images des réels : $-3$ ; $-2$ ; $-0.5$ et 0 ?
   iii. Quel semble être l'ensemble de définition de la fonction *ln* ?
   iv. Que remarque-t-on quand au signe de $\ln(x)$ en fonction de $x$ ?

   (b) À l'aide de votre calculatrice, déterminer une valeur approchée du réel $x$ tel que $\ln(x) = 1$.
2. (a) Sur une calculatrice (on utlisera les listes), compléter le tableau suivant :

| $a$ | $b$ | $ab$ | $\ln(a) + \ln(b)$ | $\ln(ab)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 2 | | | |
| 1 | 3 | | | |
| 2 | 4 | | | |
| 3 | 5 | | | |
| 5 | 8 | | | |
| 10 | 12 | | | |

   (b) $a$ et $b$ étant deux réels strictement positifs, quelle relation semble lier $\ln(a)$, $\ln(b)$ et $\ln(ab)$ ?
   (c) En admettant cette conjecture et en posant $b = a$, déteminer la relation liant $\ln(a)$ et $\ln(a^2)$.
3. (a) À l'aide d'une calculatrice, compléter le tableau suivant :

| $a$ | $\ln(a)$ | $\ln(a^3)$ | $3\ln(a)$ | $\ln(a^5)$ | $5\ln(a)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 5 | | | | | |
| 10 | | | | | |

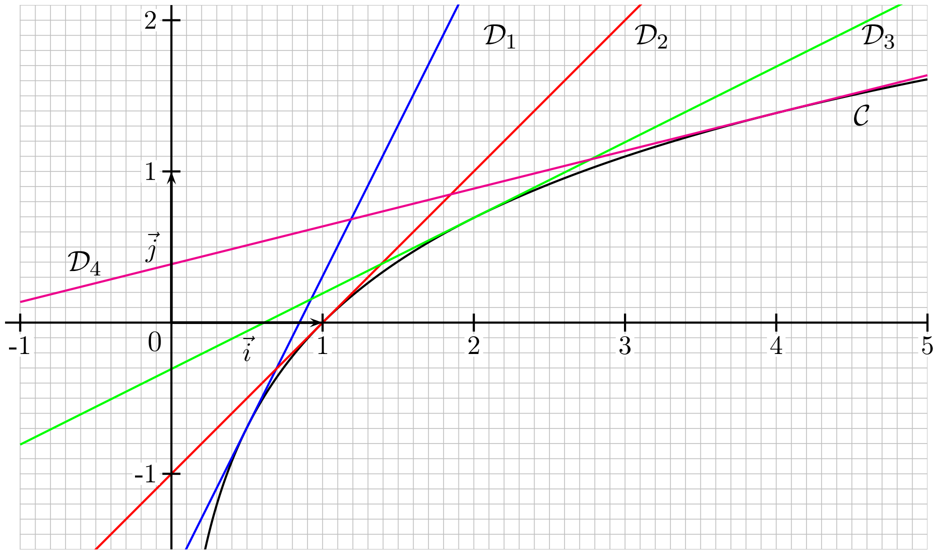
   (b) Soit $a$ un réel strictement positif, quelle relation semble lier $\ln(a)$ et $\ln(a^n)$, avec $n \in \mathbb{N}$ ?
   (c) Si on admet cette formule, comment peut-on écrire $\ln(256)$ en fonction de $\ln(2)$ ? $\ln(729)$ en fonction de $\ln(3)$ ?
4. (a) Compléter le tableau suivant :

| $a$ | $\dfrac{1}{a}$ | $\ln(a)$ | $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)$ |
|---|---|---|---|
| 0.2 | | | |
| 2 | | | |
| 7 | | | |
| $\dfrac{25}{3}$ | | | |

   (b) Soit $a$ un réel strictement positif, quelle relation semble lier $\ln(a)$ et $\ln\left(\frac{1}{a}\right)$ ?

On appelle la fonction imaginée par Neper (dont on admet l'existence) la fonction **Logarithme Népérien**.

*Travail de l'élève :*




Le dessin ci-dessus donne la représentation graphique de la fonction ln et de quatre droies $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$. Les équations des droites sont :

$$y = 2x - 1 - \ln(2), \qquad y = x - 1 \qquad y = \frac{1}{2}x - 1 + ln2 \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{4}x - 1 + 2\ln(2)$$

1. Attribuer à chaque droite une des équations données ci-dessus.
2. Que peut-on dire de chacune des droites tracées sur le dessin précédent ?
3. En déduire $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(4)$.
4. Que peut-on conjecturer quant à la dérivée de la fonction ln ?

**Définition 1.** On admet l'existence et l'unicité d'une fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, appelée **Logarithme Népérien**, notée ln, telle que :

- $\ln(1) = 0$
- $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

**Remarque :** L'expression $\ln(x)$ n'a de sens que si $x > 0$.

**Exercice 1.1.** Dans chaque cas, déterminer les valeurs des $x$ pour lesquelles l'expression est définie :

1. $\ln(2x+1)$
2. $\ln(-x+4)$
3. $\ln(x+3)$
4. $\ln(-2x)$
5. $\ln(x^2)$
6. $3 - ln(x)$
7. $\ln\left(\frac{x}{4}\right)$
8. $\ln(x^2+1)$

**Exercice 1.2.** Soient $f$ et $g$ les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - \ln(x)$ et $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.

# 2 Etude de la fonction ln

## 2.1 Tableau de variations

Pour tout $x \in ]0;+\infty[$, on a $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$.
Donc la fonction logarithme népérien a une dérivée toujours strictement positive.
La fonction est strictement croissante, d'où le tableau de variations ci-contre :

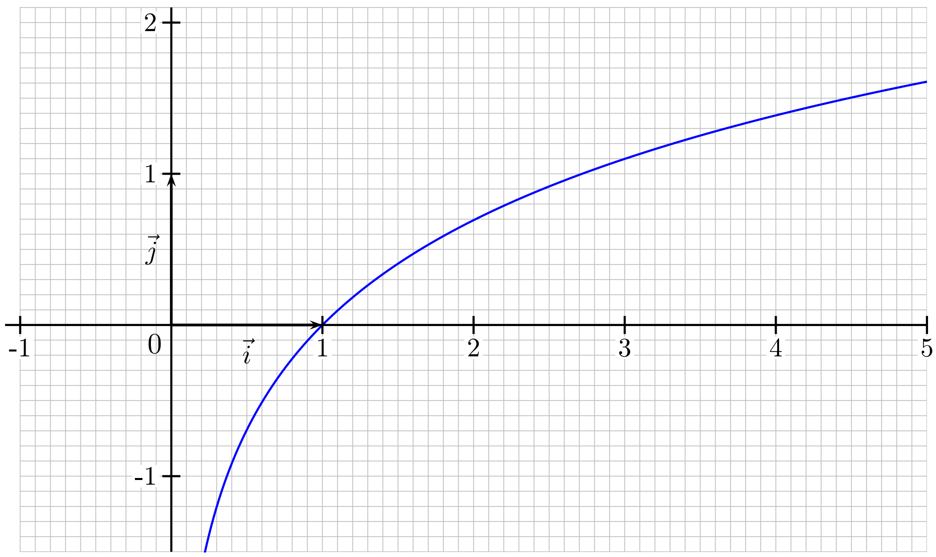
| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{1}{x}$ | ‖ | | $+$ | | |
| $\ln(x)$ | ‖ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |
| Signe de $\ln(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

## 2.2 Courbe représentative

On a le tableau de valeurs ci-dessous :

| $x$ | $0.1$ | $0.25$ | $0.5$ | $0.75$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln(x)$ | $-2.30$ | $-0.69$ | $-1.39$ | $-0.29$ | $0.00$ | $0.69$ | $1.10$ | $1.39$ | $1.61$ |

On peut alors tracer la courbe représentative de la fonction ln :




## 2.3 Résolution d'équations logarithmiques

On rappelle que la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et que $\ln(1) = 0$.
On en déduit :

- $\ln(x) = 0 \iff x = 1$
- $\ln(x) > 0 \iff x > 1$
- $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$
- $\ln(x) > \ln(y) \iff x > y$

*Exemples :*
- Résoudre l'équation $\ln(x-4)=0$
  Domaine de définition $D$ :
  Résolution sur $D$ :
- Résoudre l'équation $\ln(x-4)=\ln(x)+\ln(4)$
- Résoudre l'équation $\ln(5-x)<0$

**Exercice 2.1.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
- $\ln(3x)=\ln(x+8)$
- $\ln(2x+1)>\ln(2-x)$
- $\ln(3)+2\ln(x)=\ln(5)$
- $\ln(6-3x)>\ln(x+2)$
- ...

### 2.4 Le nombre $e$

D'après ce que l'on vient de faire, on constate qu'il existe une unique solution dans $]0;+\infty[$ à l'équation $\ln(x)=1$. On note ce nombre $e$. On a donc $\ln(e)=1$.

**Exercice 2.2.** Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(x)=3$ en fonction du nombre $e$.
*Indication* : $3=3\ln(e)$

On pourra retenir également, que pour tout entier relatif $n$ on a $n=\ln(e^n)$ et $\ln(x)=n \Leftrightarrow x=e^n$

## 3 Propriétés algébriques

**Propriété Fondamentale :**

Pour tous réels strictement positifs $a$ et $b$, on a $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$

*Exemple :* $\ln(6)+\ln(8)=\ln(6\times 8)=\ln(48)$

**Propriété 1.** Pour tous réels strictement positifs $a$ et $b$, et tout entier naturel $n$, on a :

- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln(a)$
- $\ln(a^n)=n\ln(a)$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\dfrac{1}{2}\ln(a)$

*Preuves :*
- $\ln\left(a\times\dfrac{1}{a}\right)=\ln(1)\Longleftrightarrow \ln(a)+\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=0 \Longleftrightarrow \ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln(a)$

- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- Par récurrence
- $\ln(a) = \ln\left((\sqrt{a})^2\right) = 2\ln(\sqrt{a})$

*Exemples :*

$\ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln(5)$

$\ln(32) = \ln\left(2^5\right) = 5\ln(2)$

$\ln\left(\frac{13}{8}\right) = \ln(13) - \ln(8)$

$\ln\left(\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\ln(3)$

**Exercice 3.1.** Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln(2)$ :

1. $\ln(8)$
2. $\ln(\sqrt{2})$
3. $\ln(\sqrt{2}) - \ln(16)$
4. $\ln(2) - 4\ln(8)$

**Exercice 3.2.** Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ :

1. $\ln(6)$
2. $\ln(12)$
3. $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$
4. $\ln(54)$
5. $\ln(18)$
6. $3\ln(36)$
7. $\ln\left(\frac{8}{27}\right)$

**Exercice 3.3.** Pour chacun des cas suivants, comparer $A$ et $B$ sans utiliser la calculatrice :

1. $A = 4\ln(2)$ et $B = 3\ln(2)$
2. $A = \ln(8)$ et $B = 2\ln(2)$
3. $A = 5\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ et $B = -2\ln(9)$
4. $A = 5\ln(8)$ et $B = 15\ln(3)$

# 4 Fonction composée

## 4.1 Dérivée d'une fonction $\ln(u)$

**Propriété 2.** Soit une fonction $u$ strictement positive et dérivable sur un intervalle $I$. Alors, la fonction $f$ définie sur $I$ par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur $I$ et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.
On retiendra $\left(\ln(u)\right)' = \frac{u'}{u}$.

*Exemples :* Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \ln(x^2)$. Alors $f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

Soit la fonction $g$ définie sur $]2;+\infty[$ par $g(x) = \ln(3x-6)$. Alors $g'(x) = \frac{3}{3x-6}$

Soit la fonction $h$ définie sur $]-1;+\infty[$ par $h(x) = \ln\left(\sqrt{4x+4}\right)$. On remarque $h(x) = \frac{1}{2}\ln(4x+4)$ et $h'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{4x+4} = \frac{2}{4x+4}$

**Exercice 4.1.** Pour chacun des cas suivants, trouver l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction $f$, puis déterminer $f'(x)$ :

1. $f(x) = \ln(2x)$
2. $f(x) = \ln(3 - 5x)$
3. $f(x) = \ln(-x)$
4. $f(x) = x\ln(1 + x)$

**Exercice 4.2.** Soit la fonction $f$ définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -x - \ln(x)$. Le plan est rapporté à un repère.

1. Calculer $f'(x)$
2. Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe représentative de $f$ au point d'ascisse 1
3. Vérifier la cohérence des résultats à la calculatrice.

**Exercice 4.3. Transformer une suite géométrique en une suite arithmétique**

On considère la suite $u$ définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n \end{cases}$

1. Déterminer la nature de la suite $u$
2. Écrire $u_n$ en fonction de $n$ et préciser le signe de $u_n$, pour tout entier naturel $n$
3. Déterminer à l'aide d'une calculatrice graphique le plus petit entier naturel $n_0$ tel que $u_n > 100$
4. On pose $v_n = \ln(u_n)$.
   (a) Écrire $v_n$ en fonction de $n$
   (b) En déduire la nature de la suite $(v_n)$
   (c) Résoudre l'inéquation $v_n > \ln(100)$ et expliquer comment on peut retrouver le résultat de la question 3.

**Exercice 4.4. BAC**

Soit $f$ et $g$ les fonction définies sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x-1)$ et $g(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$. On note respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leur courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

**Partie A : Étude du sens de variation de $f$ et de celui de $g$**

1. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$
2. Étudier le sens de variation de chacune des fonctions $f$ et $g$ ; dresser leur tableau de variations.

**Partie B : Étude des positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$**

On considère la fonction $d$, définie sur $]1; +\infty[$ par $d(x) = f(x) - g(x)$.

1. (a) Calculer $d'(x)$
   (b) Étudier le sens de variation de $d$ et donner son tableau de variations
   (c) Calculer $d(2)$
   En déduire le signe de $d(x)$, lorsque $x \in ]1; +\infty[$
2. En utilisant les résultats précédents :

(a) Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un seul point commun, noté $A$, dont on donnera les coordonnées

(b) Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent au point $A$ la même tangente $\mathcal{T}$, dont on donnera l'équation réduite

(c) étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$

3. Tracer, avec précision, la droite $\mathcal{T}$ et les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

## 4.2 Exemple d'étude d'une fonction et son application économique

1. **Étude de la fonction :**
Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = 40 \times \dfrac{\ln(x) - 1}{x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

(a) i. Trouver son ensemble de définition $D_f$

ii. Calculer $f'(x)$ sur $D_f$ et étudier son signe

iii. En déduire le tableau de variations de $f$

(b) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x_0 = 1$

(c) i. Compléter le tableau de valeurs suivant (on arrondira à $10^{-2}$ les résultats) :

| $x$ | 0.5 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

ii. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente $\mathcal{T}$

(d) Étudier, en fonction de $x$ le signe de $f(x)$

2. **Application économique :**
Une entreprise fabrique des stylos. Elle peut en fabriquer jusqu'à 1000 par semaine. Le résultat de l'exploitatioin réalis{e par la vente de $p$ milliers de stylos est donnée, en centaines d'euros par :

$$f(p) = 40 \times \frac{\ln(p) - 1}{p} \text{ pour } p \in [1; 10]$$

(a) Calculer le résultat d'exploitatioin réalisé par la vente de 1000, 3000 et 10000 stylos.

(b) Déterminer le nombre maximal que doit produire l'entreprise par semaine pour atteindre le seuil de rentabilité

(c) Déterminer le nombre de stylos que l'entreprise doit vendre pour réaliser une résultat d'exploitation maximal. Quel est alors ce résultat ?

# Les Annexes

## Un peu d'histoire

Au $XVI^{\text{ème}}$, les calculs en astronomie et en navigation ont engendré des calculs extrêmement compliqués. De nombreux mathématiciens ont alors essayé de simplifer les calculs. L'idée était de remplacer les multiplications par les additions.

Le plus célèbre de ces mathématiciens, John Néper, un écossais, publia en 1614 une table de calcul, dont voici un extrait :

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2 | 0.69315 |
| 3 | 1.09861 |
| 4 | 1.38629 |
| 5 | 1.60944 |
| 6 | 1.79176 |
| 7 | 1.94591 |
| 8 | 2.07944 |
| 9 | 2.19722 |
| 10 | 2.30259 |
| 11 | 2.39790 |
| 12 | 2.48491 |
| 13 | 2.56495 |
| 14 | 2.63906 |
| 15 | 2.70805 |
| 16 | 2.77259 |

1. (a) Calculer $f(2) + f(3)$
   (b) Comparer avec $f(6)$
   (c) Procéder de même avec $f(4)$ et $f(3)$.
   (d) Conjectuer la formule dans le cas général.
   (e) Si cette propriété peut être généralisée à tout réel strictement positif, quelle sont les valeurs de $f(24)$ (on fera le calcul de deux manière différentes) ? et de $f(35)$ ?
2. Soit $a$ un réel strictement positif. En écrivant $a = a \times 1$, déterminer $f(1)$.
3. (a) Que peut-on dire des nombres 1, 2, 4, 8, 16 ?
   (b) Que peut-on dire des nombres $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(8)$ et $f(16)$ ?
   (c) Écrire $f(16)$ en fonction de $f(2)$.
   (d) Que peut-on conjecturer pour $f(2^n)$ (où $n$ est un entier naturel) ?
   (e) En supposant que cette propriété peut être généralisée à tout réel strictement positif, écrire :
   - $f(25)$ en fonction de $f(5)$ ;
   - $f(81)$ en fonction de $f(9)$ ;
   - $f(81)$ en fonction de $f(3)$ ;

On admettra l'existence d'une fonction $f$, définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, telle que :

**Pour tous réels $a$ et $b$ strictement positifs, on a :** . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Neper a appelé cette fonction : **Logarithme**

Conséquence : $f(\ldots) = f(1 \times 1) = f(\ldots) + f(\ldots)$. On en déduit que . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

## A LA DÉCOUVERTE DE LA FONCTION ln

On remarque sur la calculatrice une fonction notée *ln*. Regardons si elle correspond bien à la fonction imaginée par Neper. *On arrondira tous les résultats de l'activité à* $10^{-5}$.

1. (a) À l'aide de la touche *ln* de votre calculatrice, répondre aux question suivantes
   - i. Déterminer les images par la fonction *ln* des réels : $0.1$ ; $0.5$ ; $1$ ; $2$ ; $5$ ; $1000$ et $10^{25}$
   - ii. Que se passe-t-il quand on veut calculer les images des réels : $-3$ ; $-2$ ; $-0.5$ et $0$ ?
   - iii. Quel semble être l'ensemble de définition de la fonction *ln* ?
   - iv. Que remarque-t-on quand au signe de $\ln(x)$ en fonction de $x$ ?

   (b) À l'aide de votre calculatrice, déterminer une valeur approchée du réel $x$ tel que $\ln(x) = 1$.

2. (a) Sur une calculatrice (on utlisera les listes), compléter le tableau suivant :

| $a$ | $b$ | $ab$ | $\ln(a) + \ln(b)$ | $\ln(ab)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 2 | | | |
| 1 | 3 | | | |
| 2 | 4 | | | |
| 3 | 5 | | | |
| 5 | 8 | | | |
| 10 | 12 | | | |

   (b) $a$ et $b$ étant deux réels strictement positifs, quelle relation semble lier $\ln(a)$, $\ln(b)$ et $\ln(ab)$ ?

   (c) En admettant cette conjecture et en posant $b = a$, déteminer la relation liant $\ln(a)$ et $\ln(a^2)$.

3. (a) À l'aide d'une calculatrice, compléter le tableau suivant :

| $a$ | $\ln(a)$ | $\ln(a^3)$ | $3\ln(a)$ | $\ln(a^5)$ | $5\ln(a)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 5 | | | | | |
| 10 | | | | | |

   (b) Soit $a$ un réel strictement positif, quelle relation semble lier $\ln(a)$ et $\ln(a^n)$, avec $n \in \mathbb{N}$ ?

   (c) Si on admet cette formule, comment peut-on écrire $\ln(256)$ en fonction de $\ln(2)$ ? $\ln(729)$ en fonction de $\ln(3)$ ?

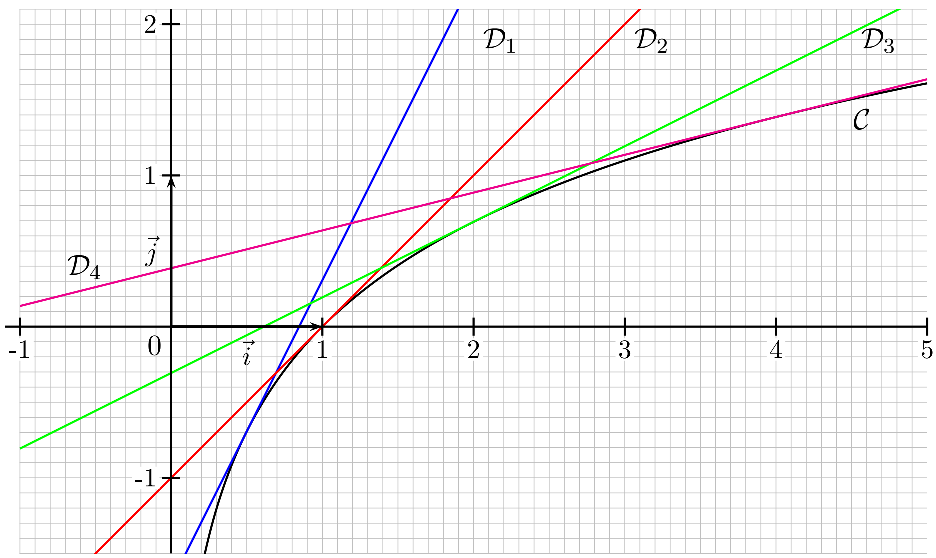
4. (a) Compléter le tableau suivant :

| $a$ | $\dfrac{1}{a}$ | $\ln(a)$ | $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)$ |
|---|---|---|---|
| 0.2 | | | |
| 2 | | | |
| 7 | | | |
| $\dfrac{25}{3}$ | | | |

   (b) Soit $a$ un réel strictement positif, quelle relation semble lier $\ln(a)$ et $\ln\left(\frac{1}{a}\right)$ ?

On appelle la fonction imaginée par Neper (dont on admet l'existence) la fonction **Logarithme Népérien**.

# Etude de la courbe représentative de ln




Le dessin ci-dessus donne la représentation graphique de la fonction ln et de quatre droies $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$. Les équations des droites sont :

$$y = 2x - 1 - \ln(2), \qquad y = x - 1 \qquad y = \frac{1}{2}x - 1 + ln2 \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{4}x - 1 + 2\ln(2)$$

1. Attribuer à chaque droite une des équations données ci-dessus.
2. Que peut-on dire de chacune des droites tracées sur le dessin précédent ?
3. En déduire $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(4)$.
4. Que peut-on conjecturer quant à la dérivée de la fonction ln ?

# Exercices

**Exercice 1.1.** Dans chaque cas, déterminer les valeurs des $x$ pour lesquelles l'expression est définie :

1. $\ln(2x+1)$
2. $\ln(-x+4)$
3. $\ln(x+3)$
4. $\ln(-2x)$
5. $\ln(x^2)$
6. $3 - ln(x)$
7. $\ln\left(\frac{x}{4}\right)$
8. $\ln(x^2+1)$

**Exercice 1.2.** Soient $f$ et $g$ les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - \ln(x)$ et $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.

**Exercice 1.3.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(3x) = \ln(x+8)$
2. $\ln(2x+1) > \ln(2-x)$
3. $\ln(3) + 2\ln(x) = \ln(5)$
4. $\ln(6-3x) > \ln(x+2)$

**Exercice 1.4.** Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(x) = 3$ en fonction du nombre $e$.
*Indication* : $3 = 3\ln(e)$

**Exercice 1.5.** Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln(2)$ :

1. $\ln(8)$
2. $\ln(\sqrt{2})$
3. $\ln(\sqrt{2}) - \ln(16)$
4. $\ln(2) - 4\ln(8)$

**Exercice 1.6.** Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ :

1. $\ln(6)$
2. $\ln(12)$
3. $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$
4. $\ln(54)$
5. $\ln(18)$
6. $3\ln(36)$
7. $\ln\left(\frac{8}{27}\right)$

**Exercice 1.7.** Pour chacun des cas suivants, comparer $A$ et $B$ sans utiliser la calculatrice :

1. $A = 4\ln(2)$ et $B = 3\ln(2)$
2. $A = \ln(8)$ et $B = 2\ln(2)$
3. $A = 5\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ et $B = -2\ln(9)$
4. $A = 5\ln(8)$ et $B = 15\ln(3)$

**Exercice 1.8.** Pour chacun des cas suivants, trouver l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction $f$, puis déterminer $f'(x)$ :

1. $f(x) = \ln(2x)$
2. $f(x) = \ln(3-5x)$
3. $f(x) = \ln(-x)$
4. $f(x) = x\ln(1+x)$

**Exercice 1.9.** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = -x - \ln(x)$. Le plan est muni d'un repère.

1. Calculer $f'(x)$
2. Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe représentative de $f$ au point d'ascisse 1
3. Vérifier la cohérence des résultats à la calculatrice.

**<u>Exercice</u> 1.10. Transformer une suite géométrique en une suite arithmétique**

On considère la suite $u$ définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n \end{cases}$

1. Déterminer la nature de la suite $u$
2. Écrire $u_n$ en fonction de $n$ et préciser le signe de $u_n$, pour tout entier naturel $n$
3. Déterminer à l'aide d'une calculatrice graphique le plus petit entier naturel $n_0$ tel que $u_n > 100$
4. On pose $v_n = \ln(u_n)$.
   (a) Écrire $v_n$ en fonction de $n$
   (b) En déduire la nature de la suite $(v_n)$
   (c) Résoudre l'inéquation $v_n > \ln(100)$ et expliquer comment on peut retrouver le résultat de la question 3.

**<u>Exercice</u> 1.11. BAC**

Soient $f$ et $g$ les fonctions définies sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x-1)$ et $g(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$. On note respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leur courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 2cm).

**Partie A : Étude du sens de variation de $f$ et de celui de $g$**

1. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$
2. Étudier le sens de variation de chacune des fonctions $f$ et $g$ ; dresser leur tableau de variations.

**Partie B : Étude des positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$**

On considère la fonction $d$, définie sur $]1;+\infty[$ par $d(x) = f(x) - g(x)$.

1. (a) Calculer $d'(x)$
   (b) Étudier le sens de variation de $d$ et donner son tableau de variations
   (c) Calculer $d(2)$
   En déduire le signe de $d(x)$, lorsque $x \in ]1;+\infty[$
2. En utilisant les résultats précédents :
   (a) Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un seul point commun, noté $A$, dont on donnera les coordonnées
   (b) Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent au point $A$ la même tangente $\mathcal{T}$, dont on donnera l'équation réduite
   (c) étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$
3. Tracer, avec précision, la droite $\mathcal{T}$ et les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

**<u>Exercice</u> 1.12.**

1. **Étude de la fonction :**
   Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = 40 \times \dfrac{\ln(x) - 1}{x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
   (a) i. Trouver son ensemble de définition $D_f$

ii. Calculer $f'(x)$ sur $D_f$ et étudier son signe

iii. En déduire le tableau de variations de $f$

(b) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x_0 = 1$

(c) i. Compléter le tableau de valeurs suivant (on arrondira à $10^{-2}$ les résultats) :

| $x$ | 0.5 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

ii. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente $\mathcal{T}$

(d) Étudier, en fonction de $x$ le signe de $f(x)$

2. **Application économique :**
Une entreprise fabrique des stylos. Elle peut en fabriquer jusqu'à 1000 par semaine. Le résultat de l'exploitatioin réalis{e par la vente de $p$ milliers de stylos est donnée, en centaines d'euros par :

$$f(p) = 40 \times \frac{\ln(p) - 1}{p} \text{ pour } p \in [1; 10]$$

(a) Calculer le résultat d'exploitatioin réalisé par la vente de 1000, 3000 et 10000 stylos.

(b) Déterminer le nombre maximal que doit produire l'entreprise par semaine pour atteindre le seuil de rentabilité

(c) Déterminer le nombre de stylos que l'entreprise doit vendre pour réaliser une résultat d'exploitation maximal. Quel est alors ce résultat ?