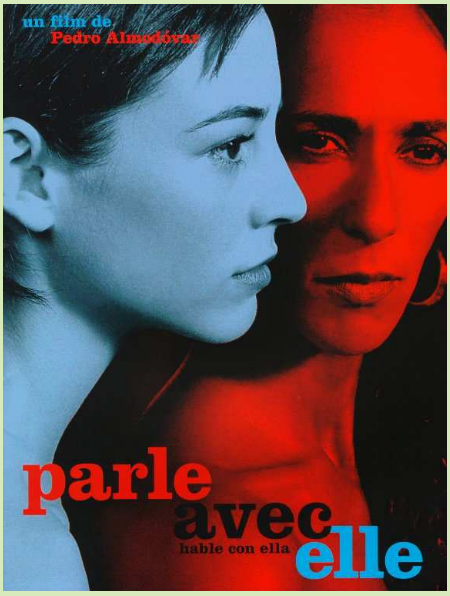
Chapitre 3

Dérivabilités

Hors Sujet



Titre : « Parle avec elle »
Auteur : Pedro Almodovar
Présentation succinte de l'auteur : Pedro Almodóvar Caballero est né le 24 septembre 1949 à Calzada de Calatrava, dans la province de Ciudad Real et la communauté autonome de Castille-La Manche, en Espagne. À 8 ans, il émigre avec sa famille en Estrémadure. Il y fait ses études secondaires qu'il poursuit chez les Franciscains. Comme Vargas Llosa il fait preuve de guidisme. Vers 16 ans il quitte sa maison seul pour s'installer à Madrid, sans argent et sans travail, mais avec un projet très concret : étudier le cinéma et en faire son métier. Il lui est impossible de s'inscrire à l'école officielle du cinéma puisque Franco vient juste de la fermer. Dans la mesure où il ne peut apprendre le langage cinématographique, Almodóvar décide d'en apprendre le fond en multipliant ses expériences artistiques personnelles dans différents domaines. Malgré la dictature, Madrid représente, pour un adolescent provincial, la culture, l'indépendance et la liberté. Il fait de nombreux petits boulots et s'achète sa première caméra super 8 après avoir décroché un emploi à la Compagnie nationale de téléphone d'Espagne. Il y travaille douze ans comme employé de bureau. Le matin, à la Compagnie de téléphone, il apprend à connaître la classe moyenne espagnole qui vit les débuts de la société de consommation, avec ses grands drames et ses petites misères. Le soir et la nuit, il écrit, fait du théâtre avec la compagnie indépendante Los Goliardos et tourne des films en super 8. Il collabore à diverses revues underground, écrit des nouvelles dont certaines sont publiées. Il a aussi réalisé des romans-photo au cours de sa jeunesse. Il fait également partie d'une troupe de théâtre amateur (référence à cette période dans Tout sur ma mère) et fait partie d'un groupe punk-rock avant de commencer sa carrière cinématographique.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
Thurston Moore (Sonic Youth)

Leçon 3

Dérivabilités

Résumé

Ce chapitre est le chapitre central de la classe de T STG. Il permet (en partie) de clore ce qui avait été entamé au collège avec les fonctions affines, c'est-à-dire, l'étude des fonctions.
L'objectif de ce chapitre est de parvenir à déterminer le sens de variation d'une fonction sans la représentation graphique de la fonction !
Lorsque nous étudierons des fonctions coût ou bénéfice, nous serons alors capables de déterminer leur évolution, leur maximum et leur minimum, les productions rentables pour une entreprise... Et tout ça sans représentation graphique.
Ce nouvel outil, entrevu, en classe de 1STG, est donc un puissant outil de calcul algébrique.

I) Dérivée d'une fonction en un point

I-1 Notion de tangente

L'idée générale de cette partie exploite la réciproque du résultat suivant :
- Si la pente d'une courbe est positive, alors la courbe monte.
- Si la pente d'une courbe est négative, alors la courbe descend.
- Si la pente d'une courbe est nulle, alors la courbe stagne.

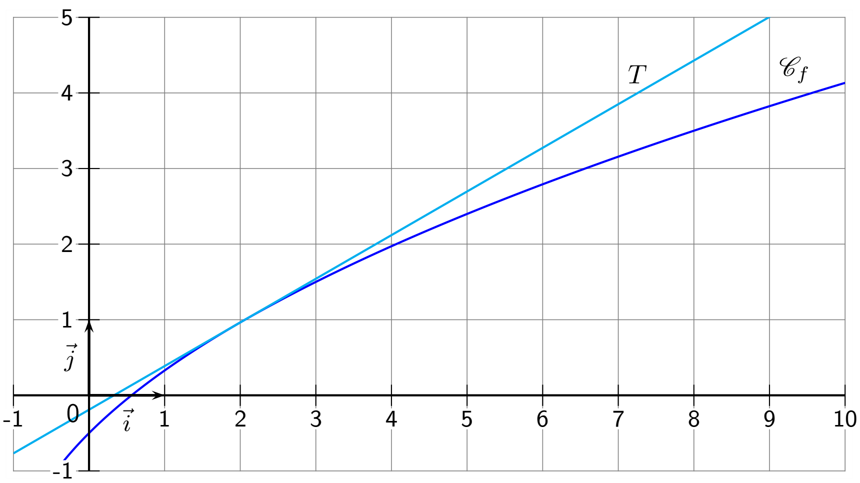
Remarque : Précisément le nombre dérivée d'une fonction est la pente de la courbe en un point donné.

Définition 1 :

Tangente
Beaucoup trop difficile pour être exposée ici, on se contentera de l'idée suivante : la tangente d'une courbe au point d'abscisse A est une droite qui passe par A en la frôlant.

Exemple :

Voici une courbe $\mathscr{C}_f$ dont nous avons tracé la tangente T en 2



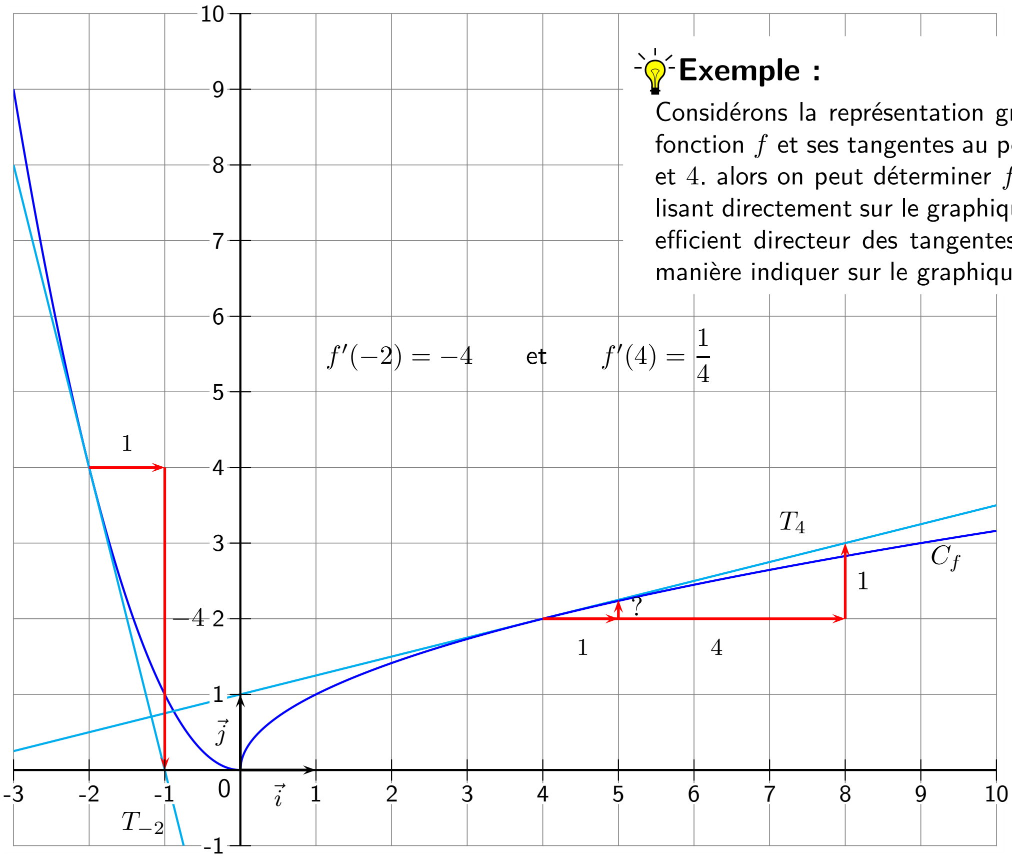
I-2 Notion de dérivée

Définition 2 :

(Aspect Graphique)
On dit qu'une fonction est dérivable en a si elle admet une tangente non verticale au point d'abscisse a.
Dans ce cas on appelle **nombre dérivée en** a, noté $f'(a)$, le coefficient directeur de cette tangente

Exemple :

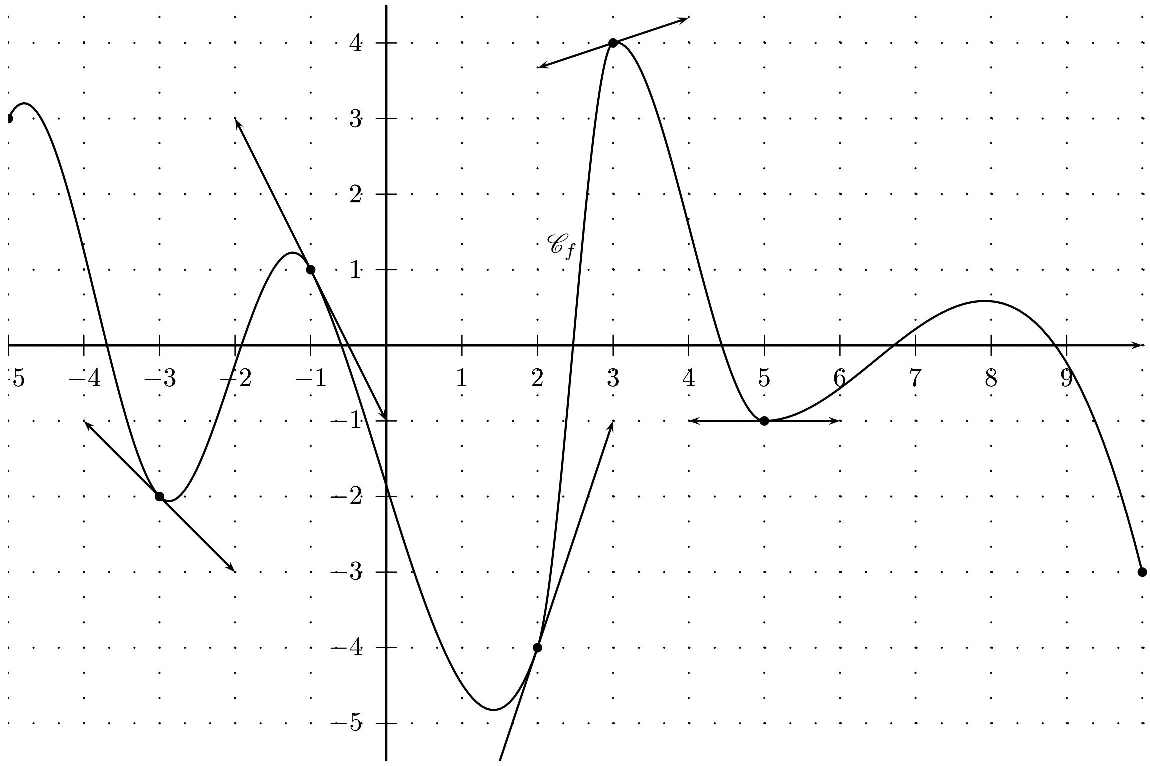
Considérons la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et ses tangentes au point d'abscisse -2 et 4. alors on peut déterminer $f'(-2)$ et $f'(4)$ en lisant directement sur le graphique la valeur du coefficient directeur des tangentes T_{-2} et T_4 de la manière indiquer sur le graphique



Exercice 1 :

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.
Compléter, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$f'(-3) = \ldots\ldots$ $f'(-1) = \ldots\ldots$ $f'(2) = \ldots\ldots$ $f'(3) = \ldots\ldots$ $f'(5) = \ldots\ldots$

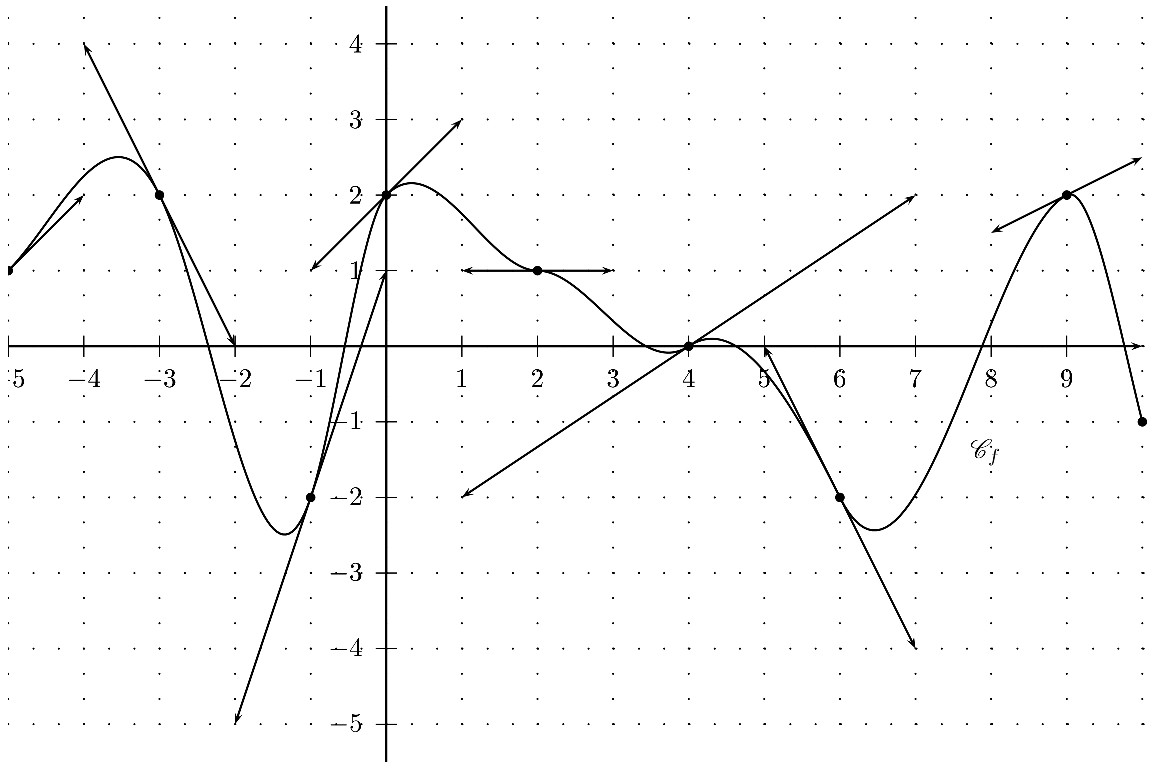


Exercice 2 :

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée. Compléter, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$f'(-5) = \ldots\ldots$ $f'(-3) = \ldots\ldots$ $f'(-1) = \ldots\ldots$ $f'(0) = \ldots\ldots$ $f'(2) = \ldots\ldots$ $f'(4) = \ldots\ldots$

$f'(6) = \ldots\ldots f'(9) = \ldots\ldots$



II) Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

II-1 Définition

Définition 3 :
Lorsqu'une fonction f admet un nombre dérivé en tout point a d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I. On définit alors la fonction dérivée, notée ..., qui à tout point a de I associe le nombre dérivé ....

Remarque : f est dérivable pour tout a de I si et seulement si la représentation graphique de f admet une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées en tout point.

Exemple :
La fonction f est représentée ci-contre.
On peut tracer en chacun des points de l'intervalle $[-2;3]$ une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées, la fonction f est donc dérivable sur $[-2;3]$.
En particulier on peut lire graphiquement

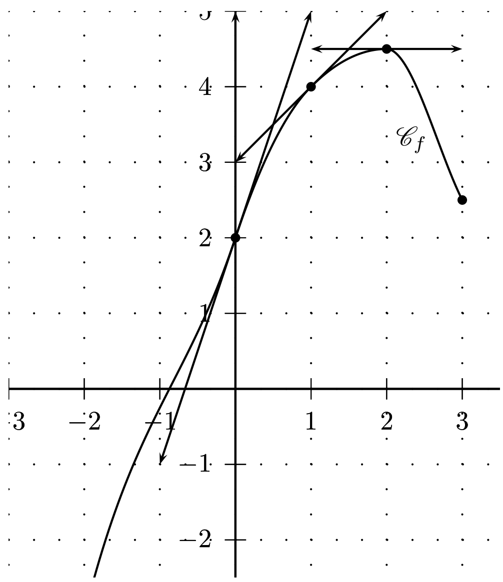
$$f'(0) = \ldots\ldots$$

puis

$$f'(1) = \ldots\ldots$$

et enfin

$$f'(2) = \ldots\ldots$$



Remarques :
- Lorsque la tangente est croissante, plus la pente de la tangente est ...., plus le nombre dérivée est ....
- L'an passé vous avez appris à dériver certaines fonctions, comme par exemple la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 2x^2$ qui a pour dérivée

$$f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

- f' désigne .... de la fonction f
- $f'(x)$ désigne .... de f en x

Définition 4 :
Si f' est la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I, on dit que f est une primitive de f sur I

Exemple :
On considère la fonction carrée que nous notons f. Dans ce cas

$$f(x) = \ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad f'(x) = \ldots\ldots$$

La dérivée de la fonction ... est la fonction ....
Une primitive de la fonction ... est la fonction ....

II-2 Tableaux récapitulatifs des dérivées

Nous admettrons les résultats suivants :

Fonction f	**Fonction** f'	**Domaine de définition de** f'
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$ (a et b réel)	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$

Exercice 3 :

1. Si $f(x) = 5$ alors, pour tout réel x, $f'(x) = \dots$
2. Si $g(x) = 3x - 4$ alors, pour tout réel x, $g'(x) = \dots$
3. Si $h(x) = -5x - 4$ alors, pour tout réel x, $h'(x) = \dots$
4. Si $k(x) = x^4$ alors, pour tout réel x, $k'(x) = \dots$
5. Si $Z(x) = \dfrac{1}{x^3}$ alors, pour tout $x \neq 0$, $Z'(x) = \dots$

Exercice 4 :

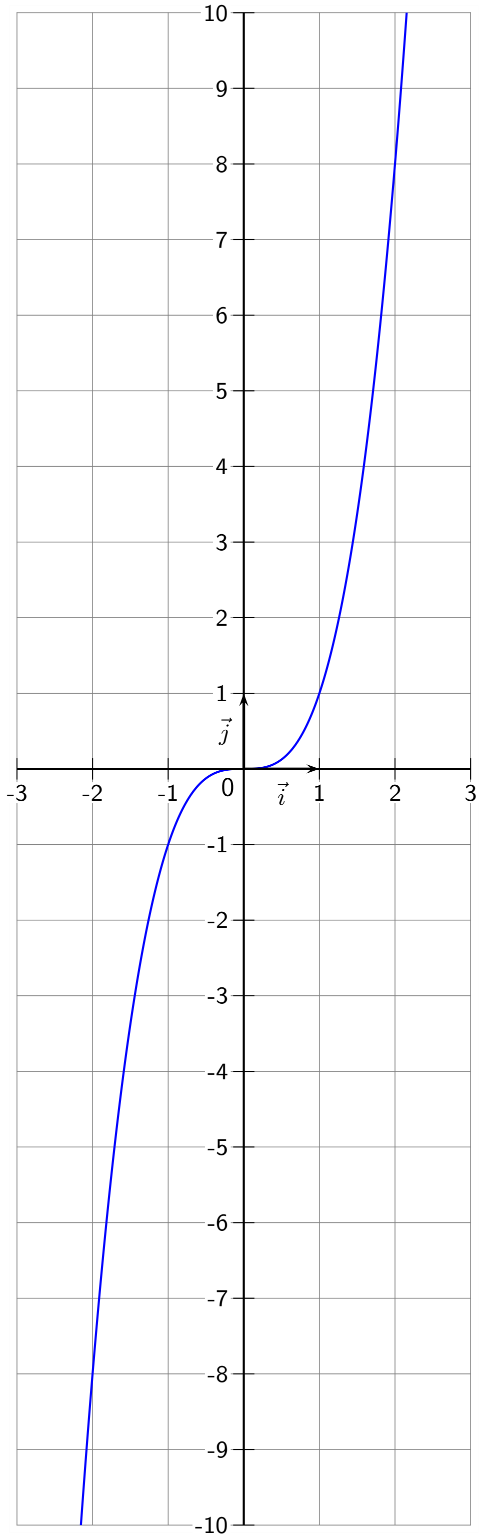
1. Calculer la dérivée de la fonction f où $f(x) = x^3$
2. En déduire $f'(0)$ et $f'(1)$
3. Interpréter graphiquement ces deux résultats
4. Représenter sur le graphique suivant, les deux tangentes de $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses 0 et 1.

Solutions :

1. On a $f'(x) = \dots$
2. Par conséquent $f'(0) = \dots$ et $f'(1) = \dots$
3.

   ....

   ....
4.



Nous avons absolument besoin de conaître des propriétés sur les fonctions dérivées pour pouvoir calculer par exemple les dérivées des fonctions f et g où $f(x) = 3x^4$ et $g(x) = x^2 + x$.
Nous admettrons les résultats du tableau suivant dans lequel u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k désigne un nombre réel.

Opération sur les dérivées

lorsque u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction	Dérivée	Conditions
$u+v$	$u'+v'$	
ku (k constante)	ku'	
uv	$u'v+uv'$	
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$u^n \quad n \in \mathbb{Z}^*$	$nu'u^{n-1}$	$u \neq 0$ sur I si $n<0$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u>0$ sur I

Exercice 5 :

1. Si $f(x)=x^3+x^2$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=\ldots\ldots$
2. Si $f(x)=3x^4$ alors f est la produit de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=\ldots$ par le réel $k=\ldots.$
   Or $u'(x)=\ldots\ldots$, par conséquent
   $$f'(x)=\ldots\cdots=\ldots\ldots$$
3. Si $f(x)=(2x+5)(-x^2+3)$ alors f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:
   $$u(x)=\ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad v(x)=\ldots\ldots$$
   De plus
   $$u'(x)=\ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad v'(x)=\ldots\ldots$$
   Par conséquent
   $$f'(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
4. Si $f(x)=\dfrac{1}{2x-5}$ alors f est l'inverse de la fonction v définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\dfrac{5}{2}\}$ par
   $$v(x)=\ldots\ldots$$
   Or
   $$v'(x)=\ldots\ldots$$
   On en déduit que :
   $$f'(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
5. Si $f(x)=\dfrac{3x-4}{x^2-1}$ sur $I=]-1;1[$ alors f est le quotient de deux fonctions u et v dérivables sur I avec $v(x)\neq 0$ sur I et :
   $$u(x)=\ldots\ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad v(x)=\ldots\ldots\ldots$$
   De plus
   $$u'(x)=\ldots\ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad v'(x)=\ldots\ldots\ldots$$

Par conséquent

$$f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

6. $f(x) = (3x-5)^2$ sur $I = \mathbb{R}$
   f est la carré d'une fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :
   $$u(x) = \dots\dots \qquad \text{et} \qquad u'(x) = \dots$$
   Par conséquent :
   $$f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
7. $f(x) = (x^2+2x)^4$ sur $I = \mathbb{R}$
   f est de la forme u^4 avec $u(x) = \dots\dots$ De plus $u'(x) = \dots\dots$ et par conséquent
   $$f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
8. $f(x) = \sqrt{3x-9}$ sur $I = [4;9]$
   f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = \dots\dots$ De plus $u'(x) = \dots\dots$ et par conséquent
   $$f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Remarques :
- Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions fonctions rationnelles sont dérivables sur tout intervalle ne contenant pas de valeur qui annule le dénominateur.

III) Applications de la dérivation à l'étude de fonction

III-1 Variations d'une fonction

Rappelons le théorème vu en classe de Première.

Théorème 1 : *Lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction*

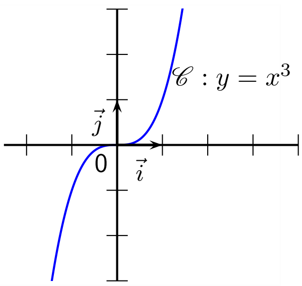
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.
2. f est croissante sur I si et seulement si $f' \dots 0$ sur I.
3. f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \dots 0$.

Remarque : Ainsi, l'étude des variations d'une fonction dérivable se ramène à la recherche des intervalles sur lesquels la dérivée f' conserve un signe constant.

Exemples :

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Etudions ses variations sur $\mathbb{R}$.
   On se rappelle que $f'(x) = 3x^2 \dots 0$, par conséquent f est une fonction $\dots\dots\dots$ sur $\mathbb{R}$



2. Etudions les variations de la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 4x - 5$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \ldots\ldots$
   De plus $2x + 4 \leq 0 \Longleftrightarrow x \leq \ldots$ donc f est .... sur ......
   De même $\ldots\cdots \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \ldots$ donc f est .... sur ......
   Par conséquent on obtient le tableau de variation suivant :

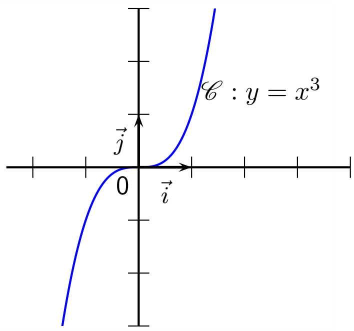
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$\cdots$	0	$\cdots$	
f		$\searrow$	$\cdots$	$\nearrow$	

III-2 Extremums d'une fonction

Théorème 2 :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f admet un extremum local en un point x_0 intérieur à I alors $f'(x_0) = 0$

Remarque : Dans la pratique, les extrémums locaux sont aisément repérables sur le tableau de variations : ils correspondent aux changements de sens de flèches. Ainsi la fonction de l'exemple précédent admet un .... local en -2 .

Remarque : La réciproque de ce théorème est fausse.
Considérons par exemple le cas de la fonction cube, dont la dérivée s'annule en 0 qui n'est pourtant pas un extremum local.
Il faut ajouter une hypothèse pour avoir le résultat réciproque, comme suit :



Théorème 3 :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit x_0 un point intérieur à I. Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f a un extremum local en x_0.

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^2 + 6x - 1$$

Sa dérivée

$$f'(x) = \dots\dots\dots\dots$$

De plus $-2x + 6 < 0 \iff -2x < \dots \iff x \dots\dots$
De même $-2x + 6 > 0 \iff -2x > \dots \iff x \dots\dots$
Par conséquent f' s'annule en changeant de signe en $a = \dots$.
Cet extremum est un .... qui vaut ....

Voici le tableau de variations de la fonction f ainsi que sa courbe :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	8	$\searrow$