Chapitre 1 : Les suites numériques

D. Zancanaro C. Aupérin

2008-2009

"Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous" Thurston Moore

Dernière modification : 16 septembre 2008

Table des matières

Cours : Les Suites numériques

1 Définition et génération d'une suite

1.1 Introduction

Il arrive que l'on demande, lors de tests psychotechniques par exemple, de compléter "logiquement" une suite de nombres, comme par exemple :

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots$$

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots$$

$$-3, 1, 5, 9, \ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots$$

En mathématiques, une **suite** u est une **liste ordonnée de nombres réels** : les éléments de cette liste :

- Sont appelés **termes**
- Sont repérés par leur rang dans la liste

Le 1^{er} terme de la suite u est souvent noté u_0 (ou u_1),
Le 2^{me} terme de la suite u est souvent noté u_1 (ou u_2)
....
....
Le n^{me} terme de la suite u est souvent noté u_{n-1} (ou u_n)

Le terme précèdent u_n est u_{n-1}, le suivant u_{n+1}.

On note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour signifier que le rang d'un terme de la suite u est un entier naturel (sans "fin" de liste). On a donc :

$$\overbrace{u}^{\text{nom de la suite}} = (\ \overbrace{u_0}^{1^{\text{er}}\text{ terme}}\ ;\ \overbrace{u_1}^{2^{\text{nd}}\text{ terme}}\ ;\ u_2\ ;\ \ldots\ ;\ u_{n-1}\ ;\ \overbrace{u_n}^{\text{terme de rang } n}\ ;\ u_{n+1}\ ;\ \ldots\ )$$

1.2 Définition

Définition 1. Une suite numérique est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou sur $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

Exemple : Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -2n^2 + 3n + 1$. Calculer les 5 premiers termes de cette suite.

1.3 Mode de génération

Une suite peut être engendrée de deux manières :

Définition "par récurrence"

$$\boxed{\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}}$$

où f est une fonction définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$.

Cette relation de récurrence permet de calculer un terme de la suite **à partir du terme précèdent**. Par exemple, on se donne

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2u_n + 1 \end{cases}$$

On a ainsi

$u_1 = -2u_0 + 1 = -2 \times \cdots + 1 = \ldots,$

$u_2 = -2u_1 + 1 = -2 \times \cdots + 1 = \ldots,$

$u_3 = -2u_2 + 1 = -2 \times \cdots + 1 = \ldots,$ etc

Avec une calculatrice :

Tapez la valeur du premier terme, puis tapez sur $\boxed{\text{EXE}}$ (ou $\boxed{\text{ENTER}}$)

On utilise la touche $\boxed{\text{Ans}}$ de la calculatrice, qui est un rappel du résultat du calcul précèdent :

Dans notre exemple $-2\times$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $+1$, puis $\boxed{\text{EXE}}$ (ou $\boxed{\text{ENTER}}$)

Vous voyez apparaître la valeur de u_1 ; à chaque fois que vous appuyez sur $\boxed{\text{EXE}}$, le terme suivant de la suite apparaît...

Remarques :

- On visualise ainsi facilement comment l'on passe d'un terme au suivant (le lien logique qui lie les termes entre eux)
- Dans l'exemple précédent, pour calculer u_{100}, il faut connaître u_{99}, et pour calculer u_{99}, il faut connaître u_{98}, ainsi de suite ...Il est alors préférable d'exprimer u_n en fonction de n pour calculer u_{100} directement.

Définition "explicite" du terme de rang n,

$$\boxed{u_n = f(n)}$$

où f est une fonction définie sur un intervalle du type $[a; \infty]$ (avec a réel).

Par exemple, on se donne $u_n = -5 + 7n$ pour $n \geqslant 0$ ($u_n = f(n)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5 + 7x$.)

On a ainsi

$u_0 = \ldots$, $u_2 = \ldots$, $u_3 = \ldots$, $u_7 = \ldots$, etc

Avec une calculatrice :

Entrez la suite comme une fonction dans le menu "Tableau", par exemple Y1=-5+7X

Puis règlez les paramètres du tableau de valeurs :

Start=0, End=20, Pitch=1 (sur Casio)

TblStart=0, ΔTbl=1 (sur TI)

Puis affichez ce tableau de valeurs : vous avez, dans l'ordre, les termes de cette suite à partir de u_0.

1.4 Sens de variation

Définition 2.
- La suite (u_n) est une suite croissante si et seulement si, pour tout entier $n, u_{n+1} \geq u_n$
- La suite (u_n) est une suite décroissante si et seulement si, pour tout entier $n, u_{n+1} \leq u_n$
- La suite (u_n) est une suite constante si et seulement si, pour tout entier $n, u_{n+1} = u_n$

Méthodes :

▶ **Pour étudier le sens de variation d'une suite , on étudie généralement le signe de la diffèrence selon les valeurs de n :**

Par exemple, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = n + 2$, alors on a
$u_{n+1} = (\ldots\ldots) + 2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
Ainsi pour tout n on a $u_{n+1} - u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
On voit que $u_{n+1} - u_n \ldots 0$, et donc que $u_{n+1} \ldots u_n$ pour tout n : la suite est donc ....

▶ **Si jamais tous les termes de la suite u sont strictement positifs, on peut comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 :**

Par exemple, pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2 \times 5^n$, on a $u_n \ldots 0$ pour tout entier naturel n et $u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
Ainsi pour tout n on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \ldots$
On voit que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ldots 1$, et donc que $u_{n+1} \ldots u_n$ pour tout n : la suite est donc ....

Exercice 1.1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 4n + 3$

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$
2. En déduire que (u_n) est croissante

Exercice 1.2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = -2n + 1$

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$
2. En déduire que (u_n) est décroissante

Exercice 1.3. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$
2. En déduire que (u_n) est croissante

Remarque : Toutes les suites ne sont pas monotones : par exemple, la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ ne l'est pas : $u_0 = \ldots$, $u_1 = \ldots$, $u_2 = \ldots$, $u_3 = \ldots$, $u_4 = \ldots$, etc

2 Suites arithmétiques

2.1 Définition

Définition 3. Une suite u de premier terme u_0 et de raison r est **arithmétique** si et seulement si, pour tout entier n, on a $u_{n+1} = u_n + r$
Autrement dit, une suite arithmétique est une suite de nombres telle que chacun de ses termes s'obtient en ajoutant au précédent un même nombre appelé raison.

Exemple : Soit la suite u arithmètique, de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$.
La définition de u par récurrence est $\left\{ u_0 = \ldots u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots \right.$
Les premiers termes de cette suite sont $u_1 = \ldots$, $u_2 = \ldots$, $u_3 = \ldots$, $u_4 = \ldots$, $u_5 = \ldots$, $u_6 = \ldots$.

Exercice 2.1. Soit u la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison $r = 3$

1. Donner la définition par récurrence de la suite u
2. Calculer les 6 premiers termes
3. Exprimer u_n en fonction de n

Méthodes :
Reconnaître une suite arithmétique :
Pour qu'une suite u soit arithmétique, il faut et il suffit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la diffèrence $u_{n+1} - u_n$ soit constante : $u_{n+1} - u_n = r \in \mathbb{R}$. Le nombre r est alors la raison de la suite u.

Exemple : Par exemple, soit u définie par $u_n = 5 - 3n$.
On a, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
Donc la suite u est arithmétique, et sa raison est $r = \ldots$.

Propriété 1. Relation entre deux termes d'une suite arithmétique :
Soit une suite arithmétique u, de premier terme u_0 et de raison r.
- **Relation entre u_n et u_0 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + nr$
- **Relation entre u_n et u_p :** Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p + (n - p)r$
- **Relation entre u_n et u_1 :** Pour tous $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_1 + (n - 1)r$

Exercice 2.2. Monsieur X. se constitue un capital retraite en versant chaque année une somme sur un compte épargne. Les versements sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 100€, le premier versement étant d'un montant de 1000€. Si on note V_n le versement de la $n - me$ année, la suite (V_n) ne commence qu'à partir de $n = 1$.

1. Donner V_1 ; V_2 ; V_3 ; V_4
2. Exprimer la suite V par récurrence
3. Exprimer V_n en fonction de n
4. Au bout de 20 ans, quel sera la capital de monsieur X. ?

2.2 Somme de termes consécutifs

Travail de l'élève : Lors d'un stage de remise en forme de 14 jours, un coureur cycliste effectue 60 km le premier jour, puis augmente son parcours de 10 km chaque jour suivant.
On note u_n le nombre de kilomètres parcourus par le cycliste ou cours du $n - me$ jour (ou a donc $u_1 = 60$.

1. Expliquer pourquoi la suite u est arithmétique ; préciser sa raison.
   Exprimer u_n en fonction de n
2. (a) Calculer la somme des sept premiers termes de la suite ; en déduire le nombre de kilomètres parcourus par le cycliste durant le première semaine.
   (b) Calculer $S_1 = 7 \times \dfrac{u_1 + u_7}{2}$. Que constate-t-on ?
3. (a) Calculer le nombre de kilomètres parcourus par le cycliste durant la deuxième semaine.
   (b) Calculer $S_2 = 7 \times \dfrac{u_8 + u_{14}}{2}$. Que constate-t-on ?

THÉORÈME 1. On considère (u_n) une suite arithmétique.
Si $S = \underbrace{u_k + u_{k+1} + ... + u_p}_{\text{termes consécutifs}}$ est une somme de termes consécutifs de cette suite, alors :

$$S = (\text{nombre de terme de S}) \times \frac{(\text{premier terme de S}) + (\text{dernier terme de S})}{2}$$

Cas particuliers importants :

THÉORÈME 2.
- Si le terme initial est u_1, alors $\underbrace{u_1 + u_2 + .. + u_n}_{n \text{ termes}} = n\dfrac{u_1 + u_n}{2}$
- Si le terme initial est u_0, alors $\underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + .. + u_n}_{(n+1) \text{ termes}} = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -5 et de terme initial $u_0 = 1$.
Montrer que $\underbrace{u_7 + u_8 + ... + u_{17}}_{\text{11 termes}} = -649$

Exercice 2.3. Pour un prêt de 1500€, un organisme de crédit propose à un client un remboursement en sept annuités, qui sont les sept premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de raison 50 et de terme initial $u_1 = 100$
Calculer le montant total du remboursement.

Exercice 2.4. En 1998, un pays consommait 20 tonnes d'un produit. On note u_n le nombre de tonnes consommées en $1998 + n$ (par exemple, u_3 est le nombre de tonnes consommées en $1998 + 3$, soit en 2001). La suite (u_n) est arithmétique, de raison 3 et de terme initial $u_0 = 20$.
Calculer le nombre total de tonnes de produit consommées par le pays de 1998 à 2004

Exercice 2.5. Un fabricant produit 200 objects la première année, puis augmente sa production de 25 objets par an.
On note u_n le nombre d'objets fabriqués la $n-$ième année. La suite (u_n) est arithmétique, de raison 25 et de terme initial $u_1 = 200$.
Calculer le nombre d'objets fabirqués en dix ans.

Exercice 2.6. Marion verse 40€ sur son livret d'épargne à l'ouverture de celui-ci, puis augmente son versement de 5€ tous les mois.
On note u_n le $n-$ième versement effectué après l'ouverture. La suite (u_n) est arithmétique, de raison 5 et de terme initial $u_0 = 40$.
Calculer la somme totale versée la première année.

3 Suites Géométriques

3.1 Définition

Définition 4. Une suite u de premier terme u_0 et de raison q est **géométrique** si et seulement si, pour tout entier n, on a $u_{n+1} = u_n \times q$
Autrement dit, une suite gémétrique est une suite de nombres telle que chacun de ses termes s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre appelé raison.

Exemple : Soit la suite u géométrique, de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = -2$.
La définition de u par récurrence est $\left\{ u_0 = \ldots u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots \right.$
Les premiers termes de cette suite sont $u_1 = \ldots$, $u_2 = \ldots$, $u_3 = \ldots$, $u_4 = \ldots$, $u_5 = \ldots$, $u_6 = \ldots$.

Exercice 3.1. Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $q = 1,25$

1. Donner la définition par récurrence de la suite u
2. Calculer les 6 premiers termes
3. Exprimer u_n en fonction de n

Méthodes :
Reconnaître une suite géométrique :
Pour qu'une suite u soit géométrique, il faut et il suffit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les termes u_n soient non nuls et que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit constant : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \in \mathbb{R}^*$. Le nombre q est alors la raison de la suite u.

Exemple : Par exemple, soit u définie par $u_n = 2 \times 3^n$.
On a, pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} =$ ....
Donc la suite u est géométrique, et sa raison est $q = \ldots$.

Propriété 2. Relation entre deux termes d'une suite géométrique :
Soit une suite arithmétique u, de premier terme u_0 et de raison q.
- **Relation entre u_n et u_0 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times q^n$
- **Relation entre u_n et u_p :** Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$
- **Relation entre u_n et u_1 :** Pour tous $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Exercice 3.2. Par exemple, on peut obtenir la définition explicite d'une suite géométrique à partir de sa définition par récurrence :
Si u est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = -2$,
alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n =$ ....

Exercice 3.3. Soit $(u_n)_{n \geqslant 2}$ une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 25.

1. Donner u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4
2. Exprimer la suite u par récurrence
3. Exprimer u_n en fonction de n
4. Calculer u_{999} ?

3.2 Somme de termes consécutifs

Travail de l'élève : Avant les fêtes de fin d'année, sur une période de six jours, un chocolatier voit sa vente de ballotins doubler chaque jour. Il en vend 20 le premier jour.
On note u_n le nombre de ballotins vendus le $n-$ième jour (on a donc $u_1 = 20$).

1. Expliquer pourquoi la suite (u_n) est géométrique ; préciser sa raison.
   Exprimer u_n en fonction de n
2. (a) Calculer la somme des six termes de cette suite ; en déduire le nombre total de ballotins vendus au cours de cette période.
   (b) Calculer $S_1 = 20 \times \dfrac{1-2^6}{1-2}$. Que constate-t-on ?
3. (a) Calculer le nombre de ballotins vendus durant les trois dernier jours de cette période
   (b) Calculer $S_2 = u_4 \times \dfrac{1-2^3}{1-2}$. Que constate-t-on ?

THÉORÈME 3. On considère (u_n) une suite géométrique, de raison $q \neq 1$.
Si $S = \underbrace{u_k + u_{k+1} + ... + u_p}_{\text{termes consécutifs}}$ est une somme de termes consécutifs de cette suite, alors :

$$S = (\text{premier terme de S}) \times \frac{1-(\text{raison})^{(\text{nombre de terme de S})}}{1-(\text{raison})}$$

Cas particuliers importants :

THÉORÈME 4.
- Si le terme initial est u_1, alors $\underbrace{u_1 + u_2 + .. + u_n}_{n \text{ termes}} = u_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$
- Si le terme initial est u_0, alors $\underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + .. + u_n}_{(n+1) \text{ termes}} = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemple : Soit (u_n) la suite géométrique de raison 3 et de terme initial $u_1 = 1$
Montrer que $u_7 + u_8 + ... + u_{17} = 64569717$

Exercice 3.4. Pour limiter ses stocks, un fabricant est amené à diminuer son activité : il décide que désormais, sa production mensuelle doit correspondre à une suite géométrique de raison $0,95$ et de terme initial 200.
On note u_n le nombre d'objets fabriqués le $n-$ième mois après cette décision (ainsi, $u_1 = 200$)
Calculer le nombre total d'objets fabriqués au cours des sept premiers mois après la décision, arrondi à l'unité.

Exercice 3.5. Un propriétaire loue un appartement à partir du 1^{er} janvier 2000, pour 9 ans et pour montant annuel de 6000 € en 2000, à condition que le locataire accepte une augmentation annuelle de 2%.
On note u_n le loyer payé en $2000 + n$. La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $1,02$ et de terme initial $u_0 = 2000$
Calculer le montant total des loyers versés pendant les neuf années, arrondi à l'unité.

Exercice 3.6. Il est prévu que le salaire d'un employé augmente de $0,4\%$ chaque mois, pendant 2 ans. Le premier mois, son salaire est de 1500 €. On note u_n le salaire perçu le $n-$ième mois. La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $1,004$ et de terme initial $u_1 = 1500$
Calculer le montant total des salaires perçus sur les deux ans.

Exercice 3.7. En 2000, un automobiliste a eu une dépense annuelle d'essence de 1200 €. Il considère que depuis, elle augmente de 3% par an. On note u_n le montant de la facture en $2000 + n$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison $1,03$ et de terme initial $u_0 = 1200$.
Calculer le montant total de sa dépenser d'essence, pour les six années de 2000 à 2005

4 Sens de variation et limite d'une suite géométrique de raison positive et de premier terme positif

4.1 Sens de variation

Travail de l'élève : La population de la ville A et celle de la ville B étaient de 10000 habitants en 2000. Depuis, chaque année, celle de A augmente de 20% et celle de B diminue de 20%. On suppose que cela dure et on note respectivement p_n et q_n les populations de A et de B en $2000 + n$.

1. (a) Expliquer pourquoi la suite (p_n) est géométrique, de raison $1,2$ et de terme initial $p_0 = 10000$, puis indiquer pourquoi cette suite est strictement croissante.
   (b) Exprimer p_n en fonction de n puis, à l'aide de la calculatrice, déterminer les années au cours desquelles la ville A verra sa population doubler, puis dépasser 1000000 !
2. (a) Expliquer pourquoi la suite (q_n) est géométrique, de raison $0,8$ et de terme initial $p_0 = 10000$, puis indiquer pourquoi cette suite est strictement décroissante.
   (b) Exprimer q_n en fonction de n puis, à l'aide de la calculatrice, déterminer les années au cours desquelles la ville A verra sa population diminuer de moitié, puis être inférieuredà 10 !

THÉORÈME 5. u est une suite géométrique de raison $q > 0$ et de terme initial $u_0 > 0$:
- Si $0 < q < 1$, la suite est décroissante : on dit que les termes de la suite sont en décroissance géométrique ou exponentielle.
- Si $q > 1$, la suite est croissante : on dit que les termes de la suite sont en croissance géométrique ou exponentielle.
- Si $q = 1$, la suite est constante

Exercice 4.1. Un nouvel article, dont le prix initial était de 250 €, voit son prix baisser tous les mois de 10%. La suite u des prix mensuels de cet article est donc géométrique

1. Présicer sa raison et son premier terme
2. Exprimer u_n en fonction de n
3. Donner le sens de variation de la suite u

4.2 Limite

Cas où $q > 1$

- On a vu dans l'activité précèdente que la population de la ville A finirait par dépasser 10000000. De la même manière, et ceux quel que soit le nombre M que l'on choisit, tôt ou tard, la population de la ville A finira par dépasser M. En conséquence on dit que p_n tend vers $+\infty$ et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = +\infty$$

Cas où $0 < q < 1$

- On a vu dans l'activité précèdente que la population de la ville B finirait par être infèrieure à 10. De la même manière, et ceux quel que soit le nombre positif m que l'on choisit, tôt ou tard, la population de la ville B finira par passer sous m. En conséquence on dit que q_n tend vers 0 et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} q_n = 0$$

THÉORÈME 6. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- Si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = 0$

Exemple :

- Soit $u_n = 3 \times 2^n$. Comme $2 > 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

– $v_n = 250 \times \frac{3}{4}^n$. Comme $\frac{3}{4} < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercice 4.2. Déterminer le sens de variation et la limite de la suite (u_n) dans chaque cas :

1. (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 1,01$ et de terme initial $0,000001$
2. (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 0,99$ et de terme initial 10000

Exercice 4.3. À la calculatrice !

1. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = 1,2$ et de terme initial $u_0 = 4$. A l'aide de la calculatrice, déterminer le premier terme de la suite qui est supérieur à 150000
2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 0,7$ et de terme initial $u_0 = 1,5$. A l'aide de la calculatrice, déterminer le premier terme de la suite qui est inférieur à 2×10^{-6}

Exercice 4.4. Donner le sens de variation et la limite de la suite géométrique (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. (u_n) a pour raison $q = 0,75$ et terme initial $u_0 = 10^5$
2. (u_n) a pour raison $q = 2,5$ et terme initial $u_1 = 0,03$

Exercice 4.5. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de terme initial $u_0 = 100$. À l'aide de la calculatrice, déterminer le premier terme de la suite qui est inférieur à $0,1$

Les Annexes

Activités : Les Suites numériques

Travail de l'élève : **Somme de termes consécutifs-Suites arithmétiques**

Lors d'un stage de remise en forme de 14 jours, un coureur cycliste effectue 60 km le premier jour, puis augmente son parcours de 10 km chaque jour [section]suivant.

On note u_n le nombre de kilomètres parcourus par le cycliste ou cours du $n - me$ jour (ou a donc $u_1 = 60$.

1. Expliquer pourquoi la suite u est arithmétique ; préciser sa raison.
   Exprimer u_n en fonction de n
2. (a) Calculer la somme des sept premiers termes de la suite ; en déduire le nombre de kilomètres parcourus par le cycliste durant le première semaine.
   (b) Calculer $S_1 = 7 \times \dfrac{u_1 + u_7}{2}$. Que constate-t-on ?
3. (a) Calculer le nombre de kilomètres parcourus par le cycliste durant la deuxième semaine.
   (b) Calculer $S_2 = 7 \times \dfrac{u_8 + u_14}{2}$. Que constate-t-on ?

Travail de l'élève : **Somme de termes consécutifs-Suites géométiques**

Avant les fêtes de fin d'année, sur une période de six jours, un chocolatier voit sa vente de ballotins doubler chaque jour. Il en vend 20 le premier jour.

On note u_n le nombre de ballotins vendus le $n -$ième jour (on a donc $u_1 = 20$).

1. Expliquer pourquoi la suite (u_n) est géométrique ; préciser sa raison.
   Exprimer u_n en fonction de n
2. (a) Calculer la somme des six termes de cette suite ; en déduire le nombre total de ballotins vendus au cours de cette période.
   (b) Calculer $S_1 = 20 \times \dfrac{1 - 2^6}{1 - 2}$. Que constate-t-on ?
3. (a) Calculer le nombre de ballotins vendus durant les trois dernier jours de cette période
   (b) Calculer $S_2 = u_4 \times \dfrac{1 - 2^3}{1 - 2}$. Que constate-t-on ?

Travail de l'élève : **Sens de variation et limite d'une suite géométique "positive"**

La population de la ville A et celle de la ville B étaient de 10000 habitants en 2000. Depuis, chaque année, celle de A augmente de 20% et celle de B diminue de 20%. On suppose que cela dure et on note respectivement p_n et q_n les populations de A et de B en $2000 + n$.

1. (a) Expliquer pourquoi la suite (p_n) est géométrique, de raison $1,2$ et de terme initial $p_0 = 10000$, puis indiquer pourquoi cette suite est strictement croissante.
   (b) Exprimer p_n en fonction de n puis, à l'aide de la calculatrice, déterminer les années au cours desquelles la ville A verra sa population doubler, puis dépasser 1000000 !
2. (a) Expliquer pourquoi la suite (q_n) est géométrique, de raison $0,8$ et de terme initial $p_0 = 10000$, puis indiquer pourquoi cette suite est strictement décroissante.
   (b) Exprimer q_n en fonction de n puis, à l'aide de la calculatrice, déterminer les années au cours desquelles la ville A verra sa population diminuer de moitié, puis être inférieuredà 10 !

Exercices : Les Suites numériques

Exercice 1.1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 4n + 3$

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$
2. En déduire que (u_n) est croissante

Exercice 1.2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = -2n + 1$

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$
2. En déduire que (u_n) est décroissante

Exercice 1.3. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$
2. En déduire que (u_n) est croissante

Exercice 2.1. Soit u la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison $r = 3$

1. Donner la définition par récurrence de la suite u
2. Calculer les 6 premiers termes
3. Exprimer u_n en fonction de n

Exercice 2.2. Monsieur X. se constitue un capital retraite en versant chaque année une somme sur un compte épargne. Les versements sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 100€, le premier versement étant d'un montant de 1000€. Si on note V_n le versement de la $n - me$ année, la suite (V_n) ne commence qu'à partir de $n = 1$.

1. Donner V_1 ; V_2 ; V_3 ; V_4
2. Exprimer la suite V par récurrence
3. Exprimer V_n en fonction de n
4. Au bout de 20 ans, quel sera la capital de monsieur X. ?

Exercice 2.3. Pour un prêt de 1500€, un organisme de crédit propose à un client un remboursement en sept annuités, qui sont les sept premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de raison 50 et de terme initial $u_1 = 100$
Calculer le montant total du remboursement.

Exercice 2.4. En 1998, un pays consommait 20 tonnes d'un produit. On note u_n le nombre de tonnes consommées en $1998 + n$ (par exemple, u_3 est le nombre de tonnes consommées en $1998 + 3$, soit en 2001). La suite (u_n) est arithmétique, de raison 3 et de terme initial $u_0 = 20$.
Calculer le nombre total de tonnes de produit consommées par le pays de 1998 à 2004

Exercice 2.5. Un fabricant produit 200 objects la première année, puis augmente sa production de 25 objets par an.
On note u_n le nombre d'objets fabriqués la $n-$ ième année. La suite (u_n) est arithmétique, de raison 25 et de terme initial $u_1 = 200$.
Calculer le nombre d'objets fabirqués en dix ans.

Exercice 2.6. Marion verse 40€ sur son livret d'épargne à l'ouverture de celui-ci, puis augmente son versement de 5€ tous les mois.
On note u_n le $n-$ ième versement effectué après l'ouverture. La suite (u_n) est arithmétique, de raison 5 et de terme initial $u_0 = 40$.
Calculer la somme totale versée la première année.

Exercice 3.1. Soit u la suite géométique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $q = 1,25$

1. Donner la définition par récurrence de la suite u
2. Calculer les 6 premiers termes
3. Exprimer u_n en fonction de n

Exercice 3.2. Par exemple, on peut obtenir la définition explicite d'une suite géométrique à partir de sa définition par récurrence :
Si u est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = -2$,
alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n =$ ....

Exercice 3.3. Soit $(u_n)_{n \geqslant 2}$ une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 25.

1. Donner u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4
2. Exprimer la suite u par récurrence
3. Exprimer u_n en fonction de n
4. Calculer u_{999} ?

Exercice 3.4. Pour limiter ses stocks, un fabricant est amené à diminuer son activité : il décide que désormais, sa production mensuelle doit correspondre à une suite géométrique de raison $0,95$ et de terme initial 200.
On note u_n le nombre d'objets fabriqués le $n-$ ième mois après cette décision (ainsi, $u_1 = 200$)
Calculer le nombre total d'objets fabriqués au cours des sept premiers mois après la décision, arrondi à l'unité.

Exercice 3.5. Un propriétaire loue un appartement à partir du 1^{er} janvier 2000, pour 9 ans et pour montant annuel de 6000 € en 2000, à condition que le locataire accepte une augmentation annuelle de 2%.
On note u_n le loyer payé en $2000 + n$. La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $1,02$ et de terme initial $u_0 = 2000$
Calculer le montant total des loyers versés pendant les neuf années, arrondi à l'unité.

Exercice 3.6. Il est prévu que le salaire d'un employé augmente de $0,4\%$ chaque mois, pendant 2 ans. Le premier mois, son salaire est de 1500 €. On note u_n le salaire perçu le $n-$ième mois. La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $1,004$ et de terme initial $u_1 = 1500$
Calculer le montant total des salaires perçus sur les deux ans.

Exercice 3.7. En 2000, un automobiliste a eu une dépense annuelle d'essence de 1200 €. Il considère que depuis, elle augmente de 3% par an. On note u_n le montant de la facture en $2000 + n$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison $1,03$ et de terme initial $u_0 = 1200$.
Calculer le montant total de sa dépenser d'essence, pour les six années de 2000 à 2005

Exercice 4.1. Un nouvel article, dont le prix initial était de 250 €, voit son prix baisser tous les mois de 10%. La suite u des prix mensuels de cet article est donc géométrique

1. Présicer sa raison et son premier terme
2. Exprimer u_n en fonction de n
3. Donner le sens de variation de la suite u

Exercice 4.2. Déterminer le sens de variation et la limite de la suite (u_n) dans chaque cas :

1. (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 1,01$ et de terme initial $0,000001$
2. (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 0,99$ et de terme initial 10000

Exercice 4.3. À la calculatrice !

1. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = 1,2$ et de terme initial $u_0 = 4$. A l'aide de la calculatrice, déterminer le premier terme de la suite qui est supérieur à 150000
2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 0,7$ et de terme initial $u_0 = 1,5$. A l'aide de la calculatrice, déterminer le premier terme de la suite qui est inférieur à 2×10^{-6}

Exercice 4.4. Donner le sens de variation et la limite de la suite géométrique (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. (u_n) a pour raison $q = 0,75$ et terme initial $u_0 = 10^5$
2. (u_n) a pour raison $q = 2,5$ et terme initial $u_1 = 0,03$

Exercice 4.5. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de terme initial $u_0 = 100$. À l'aide de la calculatrice, déterminer le premier terme de la suite qui est inférieur à $0,1$