Chap 1 : Le Raisonnement par Récurrence

I. Le principe

1. Dans la vie

J'ai une échelle. Je veux prouver à mon frère que je peux être sur n'importe lequel de ses barreaux. Comment dois-je faire ?

Commenter les réponses.

Idée du raisonnement :

si l'on peut d'abord se placer sur un barreau d'une échelle, et si l'on peut passer d'un barreau quelconque à son suivant	alors	on peut gravir tous les autres barreaux de cette échelle.

2. En maths

Soit P_n une proposition dépendant d'un entier naturel n et soit $n_0 \in N$. Démontrer par récurrence que P_n est vraie $\forall n \geq n_0$ consiste à raisonner ainsi :

- Initialisation : Vérifier que P_n est vraie.
- Hérédité : Supposer qu'il existe un entier p quelconque tel que la proposition est vraie au rang p, et sous cette hypothèse, on démontre que la proposition est vraie au rang p+1.

Axiome : A l'issue d'un tel raisonnement, on peut conclure que $\forall n \geq n_0$, P_n est vraie.

II. Rédaction

Méthode : 3 étapes

- On vérifie que la propriété est vraie au rang n_0 (facile mais indispensable)
- On suppose qu'il existe un entier $p \geq n_0$ tel que la propriété au rang p soit vraie (c'est l'hypothèse de récurrence), et on prouve que sous cette condition, la propriété est vraie au rang suivant p+1.
- On conclut

Ex : mq $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}, \forall n \in N^*$

Identifier P_n , le rang initial et ce que l'on veut montrer.

Contre-ex : « 2_n est un multiple de 3 ».

Remarque : Parfois on suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang n pour montrer qu'elle est vraie au rang suivant. Cela s'appelle la récurrence forte.

Exercices : Repère p53 A et B, n°1 p61, n°10-11 p 69

Déclic p167 A, n°12,13,15,17,18,22 p 178, n°59 p 182, act 2 p 164 à reformuler