# Chap 9 : Interprétation Géométrique des Nombres Complexes

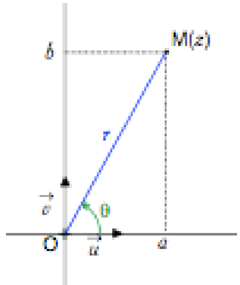
**Rappels** :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, soit M un point de coordonnées (a ;b).

Si $M \neq O$, on dit que $(r;\theta)$ est un couple de coordonnées polaires de M lorsque : $r = OM$ et $\theta = (\vec{u};\overrightarrow{OM}) \quad [2\pi]$.

On a alors :

$$r = \sqrt{a^2+b^2} \text{ et } a = r\cos\theta \text{ et } b = r\sin\theta.$$




Dans le plan complexe, on dit que le point M a pour affixe $z = a+ib$ (écriture algébrique) ou $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ (écriture trigonométrique),

On appelle $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de z et $r \in \mathbb{R}^{+*}$ son module.

*Exercice 1* : Donner les formes trigonométriques de :

$z_1 = 1+i$ $\quad$ $z_2 = \sqrt{3}+i$ $\quad$ $z_3 = 1-i\sqrt{3}$ $\quad$ $z_4 = i$

**Activité** : *Nous allons voir une 3ème façon, fort commode, de noter les nombres complexes.*

Soit $f$ l'application :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$\theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta.$$

Soient $\theta$ et $\theta'$ deux réels. En utilisant les formules sur les modules et les arguments de nombres complexes, exprimer $f(\theta+\theta')$ en fonction de $f(\theta)$ et de $f(\theta')$.

Ainsi la fonction $f$ transforme les ............................... en ..............................

La fonction $f$ est donc une solution complexe de l'équation fonctionnelle : ......................................

Or on sait que les solutions de cette équation fonctionnelle sont aussi les solutions des équations différentielles du type : ...................... *Précisons cette équation en trouvant la constante.*

Que vaut $f(0)$ ?

En prolongeant les règles de dérivation aux fonctions à valeurs complexes, exprimer $f'(\theta)$ en fonction de $f(\theta)$.

La fonction $f$ vérifie donc le problème différentiel : $\begin{cases} y' = ......... \\ y(0) = ..... \end{cases}$

Par analogie avec les fonctions à valeurs réelles, proposer une solution à ce problème différentiel.

| |
|---|
| ***Définition (ou notation)*** : Pour tout réel $\theta$, on note .............. le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$. |

*Exercice 2* : Donner le module et un argument de ce nombre ainsi que son conjugué (à connaître).

# I. Notation Exponentielle

## 1) <u>Définition</u>

La fonction $\theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$ vérifie l'équation fonctionnelle caractéristique des fonctions exponentielles. On adopte la notation suivante :

**<u>Définition</u>** :

> Tout nombre complexe z non nul, de module r strictement positif et d'argument $\theta$ admet une écriture du type $z = re^{i\theta}$, appelée forme exponentielle de z.

*Exemples* : $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $e^{i\pi} = -1$ $e^{2i\pi} = 1$ $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

*Exercice 3* : Donner les formes exponentielles des nombres complexes de l'exercice1, à savoir de:

$z_1 = 1+i$ $z_2 = \sqrt{3}+i$ $z_3 = 1-i\sqrt{3}$ $z_4 = i$

*Exercice 4* : (n°79 p 304) Dans le plan complexe, placer les points suivants

$A\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$ ; $B\left(-2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$ ; $C\left(e^{-5i\frac{\pi}{6}}\right)$ ; $D\left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$

Une simple transcription des propriétés vues sur les arguments donne :

**<u>Propriété</u>** :

> Pour tous réels $\theta$ et $\theta'$ on a :
>
> $$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'} \qquad e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}$$

Les calculs sont alors rendus très simples.

*Exemple* : Soient $z = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z' = 7e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Alors $zz' = 21e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $\frac{z}{z'} = \frac{3}{7}e^{i\frac{17\pi}{12}}$

*Exercices* :

1. Calculer $(1+i)^{14}$
2. Soient les nombres complexes : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.
   a. Déterminer la forme exponentielle de Z.
   b. Déterminer les formes algébriques de $z_1$ et de $z_2$. En déduire celle de Z.
   c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$
3. Ecrire sous la forme exponentielle ou sous la forme trigonométrique les nombres complexes : $3+i\sqrt{3}$ $\frac{\sqrt{2}}{1-i}$ $\frac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}$ $-2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
4. n° 80-81 p 304

## 2) Formules de Moivre et d'Euler

**Théorème** :

***Formule de Moivre*** : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ et $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$

***Formule d'Euler*** : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

*Preuve* :

On a $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ d'où la première formule de Moivre. Pour la seconde, on a :

$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = (\cos(-\theta) - i\sin(-\theta))^n = \left(e^{-i\theta}\right)^n = e^{-in\theta} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$

$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = 2\cos\theta$

$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta - \cos(-\theta) - i\sin(-\theta) = 2i\sin\theta$

d'où les formules d'Euler.

*Remarque* : on retrouve ainsi facilement toutes les formules de trigonométrie connues, comme $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$

*Applications* :

1. Linéariser $\sin^3\theta$ et $\cos^4\theta$.
2. Calculer $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$, puis $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin\theta$

*Exercice* : n°94 p 305

# II. Utilisation en Géométrie

*Dans tout le paragraphe, le plan est muni d'un repère* $(O;\vec{u};\vec{v})$.

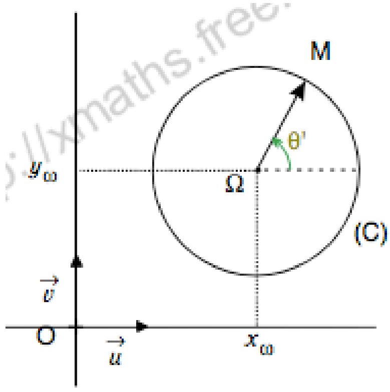
## 1) Equation paramétrique du cercle

**Propriété-Définition** :

Dans le plan complexe, on considère le cercle $C(\Omega;r)$ de rayon r et de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$.
Soit M le point d'affixe z. Alors :

$$M(z)\in C(\Omega;r) \Leftrightarrow \ z=\omega+re^{i\theta} \text{ avec } \theta\in[0;2\pi[$$

Cette égalité est appelée ***équation paramétrique*** du cercle $C(\Omega;r)$.




*Preuve* :

On sait que $M(z)\in C(\Omega;r)\Leftrightarrow M\Omega=r\Leftrightarrow |z-\omega|=r$.

On appelle $\theta=\left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega M}\right)$ dans $[0;2\pi[$. Alors :

$$M(z)\in C(\Omega;r)\Leftrightarrow z-\omega=re^{i\theta}\Leftrightarrow z=\omega+re^{i\theta} \text{ avec } \theta\in[0;2\pi[.$$

*Exemple* : l'ensemble des points M d'affixe $z=4i+2+3e^{i\theta}$ avec $\theta\in[0;2\pi[$ représente le cercle de rayon 3 et de centre le point d'affixe $4i+2$.

*Remarques* :

- En fait, il n'est pas nécessaire que $\theta\in[0;2\pi[$ particulièrement, il suffit que $\theta$ soit dans un intervalle d'amplitude $2\pi$.

- Si on note $(x_\Omega;y_\Omega)$ les coordonnées de $\Omega$ et $(x;y)$ celles de M, on a :

$$M\in C\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_\Omega+r\cos\theta\\ y=y_\Omega+r\sin\theta\end{cases} \text{ avec } \theta\in[0;2\pi[.$$

*Exercices* : n°85-86 p 305

## 2) Transformations du plan

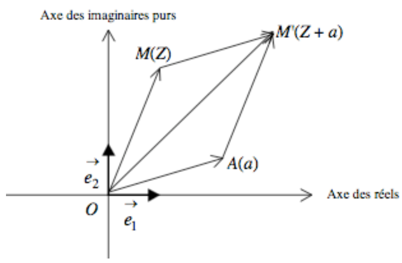
Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On lui associe la transformation T qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = f(z)$.

**Théorème** :

La ***translation*** de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $b$ transforme un point M(z) en un point M'(z') tel que :

$$z' = z + b.$$

*Ajouter un nombre b c'est translater d'un vecteur d'affixe b.*




*Preuve* :

Dire que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{w}$ signifie que $\overrightarrow{MM'} = \vec{w} \Leftrightarrow z' - z = b$ d'où le théorème.

**Théorème** :

***L'homothétie*** de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ transforme un point M(z) en un point M'(z') tel que :

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

*Preuve* :

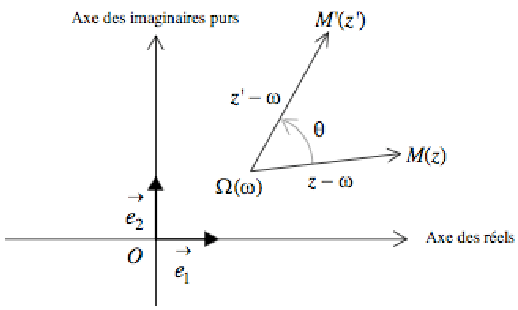
Dire que M' est l'image de M par l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ signifie que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$, ce qui se traduit bien par $z' - \omega = k(z - \omega)$.

**Théorème** :

La ***rotation*** de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\theta$ transforme un point M(z) en un point M'(z') tel que :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

*Multiplier par $e^{i\theta}$ c'est faire tourner d'un angle $\theta$.*




*Preuve* :

Si $M = \Omega$, la relation $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ est triviale. Supposons maintenant que $M \neq \Omega$. Dire que M' est l'image de M par la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\theta$

signifie que $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta \ [2\pi] \end{cases}$

On en déduit : $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$. D'où le théorème.

*Exemples* : La rotation qui associe à un nombre complexe z le nombre z' tel que :

- $z' = e^{i\theta}z$ est la rotation de centre O d'angle $\theta$
- $z' - \omega = i(z - \omega)$ est la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$
- $z' = iz$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

**Cas du triangle équilatéral :**

ABC est un triangle équilatéral de sens direct ssi $z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$

*Preuve* :

Un triangle est équilatéral ssi C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

**Reconnaître une transformation : Méthode**

Lorsqu'on a une transformation $f$ du plan dont l'écriture complexe est du type $z' = az + b$ $(a \neq 0)$, on commence par rechercher son éventuel point fixe.

- Si $a = 1 \text{ et } b = 0$ , alors $f$ est l'identité (tous les points du plan sont fixes)
- Si $a = 1 \text{ et } b \neq 0$ , il n'y a pas de point fixe et $f$ est une translation
- Si $a \neq 1$, il y a un unique point fixe d'affixe $\omega$.
  Dans ce cas, on cherche à exprimer $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$.
  - Si $a \in \mathbb{R}$ , $f$ est une homothétie de rapport $a$ et de centre $\omega$
  - Si $a$ est un complexe de module 1 $\left(a = e^{i\theta}\right)$, alors $f$ est une rotation d'angle $\theta$.

*Exemple* : Soit $f$ la transformation du plan qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = -\frac{5}{2}z + 2i$. Déterminer la nature de $f$ et préciser ses éléments caractéristiques.

(comme n°**104**-105-112-**114**-115 p 309)

*Résolution* : *(méthode type)*

- Montrons que $f$ admet un unique point invariant.

Pour cela on résout l'équation : $f(\omega) = \omega \Leftrightarrow -\frac{5}{2}\omega + 2i = \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{4}{7}i$. La transformation $f$ admet un unique point invariant $\Omega$ d'affixe $\omega = \frac{4}{7}i$.

- Pour déterminer la nature de $f$, on exprime $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$.

On a $\begin{cases} z' = -\frac{5}{2}z + 2i \\ \omega = -\frac{5}{2}\omega + 2i \end{cases}$. En soustrayant membres à membres ces deux égalités, on obtient : $z' - \omega = -\frac{5}{2}(z - \omega)$. On en déduit grâce à son écriture complexe que $f$ est l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k = -\frac{5}{2}$.

*Exercice 1* : Reconnaître la transformation du plan qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$z' = z - 3 + 2i \qquad z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z \qquad z' = -z \qquad z' - i = 2(z-i) \qquad z' = -iz \qquad z' + 1 = iz + i$

(comme n°102-103 p 307)

*Exercice 2 :* Donner l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{V}(1;2)$, de l'homothétie de centre $A(-1+i)$ et de rapport 3 et de la rotation de centre $B(2-4i)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$

*Exercice 3 :* Etant donnés $A(1+i)$ et $B(2-3i)$, déterminer les affixes des points M tels que ABM soit un triangle équilatéral.

*Exercices* : n°**113**-117-**118** p 309

*Type Bac* : n° 109-110-111-**116-119** p 309

Annales :

## 3) <u>Barycentres</u>

**Rappel** :

Soit $(A_1;\alpha_1),\ (A_2;\alpha_2),\ \ldots,\ (A_n;\alpha_n)$ un système de n points pondérés de masse totale non nulle. Alors il existe un unique point G tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}$. Ce point s'appelle le barycentre du système.

**<u>Théorème</u>** :

Soit G le barycentre de n points pondérés $(A_1;\alpha_1),\ (A_2;\alpha_2),\ \ldots,\ (A_n;\alpha_n)$ avec $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$. Notons $z_k$ les affixes des points $A_k$ $(1 \le k \le n)$. Alors l'affixe $z_G$ de G est donnée par :

$$z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$$ *(L'affixe du barycentre est la moyenne pondérée des affixes des points)*

En particulier, on retrouve l'affixe du milieu d'un segment. L'affixe du centre de gravité de 3 points A(a), B(b) et C(c) est : $\frac{a+b+c}{3}$

*Exercice* : ABC est un triangle de sens direct. On construit le point P tel que $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AP}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $AP = BC$. On construit de même les points Q et R tels que $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BQ}\right) = \frac{\pi}{2}$ , $BQ = CA$, et $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CR}\right) = \frac{\pi}{2}$, $CR = AB$. Démontrer que le triangle PQR a le même centre de gravité que ABC.

## 4) Quelques lieux de points typiques :

Soient A et B deux points distincts du plan.

- Ensemble des points M tels que $MA = k$ :

  Si $k > 0$ : Cercle de centre A et de rayon k
  Si $k = 0$ : Le point A
  Si $k < 0$ : L'ensemble vide

- Ensemble des points M tels que $MA = MB$ :

  Médiatrice du segment $[AB]$

- Ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = 0 \quad [\pi]$ :

  Droite $(AB)$ privée des points A et B.

- Ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = 0 \quad [2\pi]$ :

  Droite $(AB)$ privée du segment $[AB]$.

- Ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \pi \quad [2\pi]$ :

  Segment $[AB]$.

- Ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$ :

  Cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.

- Ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ :

  Demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B et tel que MAB soit direct.

- Ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ :

  Demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B et tel que MAB soit indirect.

- Ensemble des points tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ :

  Cercle de diamètre $[AB]$

*Remarque : Un angle orienté n'est défini que si les vecteurs ne sont pas nuls. C'est pourquoi les points A et B doivent être retirés, le cas échéants, des ensembles ci-dessus.*