Chapitre 8 : Equations Différentielles
& Fonctions Exponentielles

Introduction

Le Radon est un gaz radioactif qui se désintègre avec le temps, comme beaucoup d'autres gaz de ce type.
On a observé dans ce cas une perte d'environ 16,5 % de la masse par jour.

I. Modélisation

1) Pour étudier l'évolution d'une masse initiale m sur plusieurs jours, on modélise dans un premier temps la situation ainsi :
   On considère la suite M_n de la masse de radon restant au bout de n jours ($n \in \mathbb{N}$) .
   a. On a alors que M_n est une suite géométrique et que :
   $$M_{n+1} = (1-0,165)M_n = 0,835M_n = 0,835^{n+1}M_0 = 0,835^{n+1}m$$
   b. Donc $M_n = r_n \times m$ avec $r_n = 0,835^n$.

2) Mais cette modélisation possède un défaut. En effet, la perte de la masse se fait de manière continue tout au long de la journée. Il semble alors logique de s'inspirer de ce que l'on a fait au 1) et de considérer la fonction $M(x)$ de la masse restant au bout de x jours ($x \in \mathbb{R}^+$). Il est alors naturel de supposer aussi que $M(x) = r(x) \times m$.
   a. Alors on a $\quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad M(x+y) = r(x+y)m = r(y)M(x)$
   b. Comme ceci est vrai $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}$, on a $r(x+y) = r(x)r(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
   On dit que r transforme les sommes en produit.

II. Relation fonctionnelle

On s'intéresse alors aux fonctions f telles que $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x)f(y)$.
Supposons qu'il en existe une non nulle, dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On considère la fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto f(x+y) = f(x)f(y) \end{aligned}$$

En dérivant g, on obtient : $g'(y) = f'(x+y) = f(x) \times f'(y)$ (pour x fixé, $f(x)$ aussi)
Et donc $\quad g'(0) = f'(x) = f(x) \times f'(0) = kf(x)$.
Or ceci est vrai pour n'importe quel $x \in \mathbb{R}$.
Donc la fonction f vérifie alors la relation focntionnelle suivante :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = kf(x).$$

La fonction f est donc proportionnelle à sa dérivée.

III. TP : Introduction de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler

Voir page suivante.

TP : Introduction de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler

De nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou autres sont modélisés par des fonctions proportionnelles à leur dérivée. Nous en avons vu un exemple précédemment.
On s'intéresse maintenant au cas particulier de la fonction f qui serait égale à sa dérivée, ie tq $f' = f$.
Nous connaissons déjà la fonction nulle, mais elle est sans intérêt. Notre objectif est d'en trouver d'autres.

Première Partie : Théorie

Supposons qu'il existe une fonction f, non nulle, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \text{ sur } \mathbb{R}$$

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $g = \lambda f$. Démontrer que $g' = g$ sur $\mathbb{R}$. Conclure.

2) Supposons maintenant qu'il existe une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions : $(P)\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

   a) Soit la fonction c définie sur $\mathbb{R}$ par $c(x) = f(x)f(-x)$. Montrer que c est une fonction constante égale à 1. En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

   b) Démontrer que si g est une fonction qui vérifie (P) alors $g = f$. Conclure.

   Indication : On pourra considérer la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h = \dfrac{g}{f}$

Dans la suite, la fonction f est **l'unique** fonction satisfaisant les conditions (P) (on suppose toujours qu'une telle fonction existe). Nous allons maintenant essayer de tracer la représentation graphique de f grâce à la méthode d'Euler.

Deuxième Partie : Numérique

La **méthode d'Euler** consiste à tracer une approximation d'une courbe représentative d'une fonction dont on connaît la dérivée, grâce à ses tangentes. En particulier, elle permet aussi de tracer une approximation de la courbe représentative de la primitive F vérifiant $F(x_0)=b$ d'une fonction f donnée.

Préliminaires :

On rappelle l'approximation pour h proche de 0 : $F\left(x_0+h\right)\simeq F'(x_0)h+F(x_0)$, ie

$$F\left(x_0+h\right)\simeq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De même on a $F\left(x_0+2h\right)\approx F'(x_0+h)h+F(x_0+h)$, ie :

$$F\left(x_0+2h\right)\simeq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1) Donner F, x_0, et b dans le cas qui nous intéresse.
2) Appliquer ces approximations à la fonction f qui nous intéresse.
3) Réitérer le processus d'approximations pour avoir les valeurs approchées de $F(x_0+nh)$, jusqu'à n = 5. Ce sont elles qui nous permettent de tracer l'approximation de la courbe représentative de F.
4) Faire de même pour n négatif.

Le TP Excel :

1) Commençons par rentrer les conditions initiales dans la colonne A :
   a. En A1 , mettre le nom « h ». En A2, rentrer la valeur de h, par ex 0,1.
   b. En A5, mettre le nom « x_0 ». En A6 rentrer la valeur de x_0.
   c. En A9, mettre le nom « $f(x_0)$ ». En A10, rentrer la valeur de $f(x_0)$.

Dans la première cellule des colonnes suivantes, mettre le nom de la colonne.

2) Dans la colonne B, mettre les valeurs de n, de –50 à +50 (cellules B2 à B102).

3) Dans la colonne C, mettre les valeurs de x_0+nh (cellules C2 à C102).
   (Rappel : pour prendre une cellule fixe, on met la lettre entre $)

4) Dans la colonne D, mettre les approximations de $F(x_0+nh)=f(x_0+nh)$ trouvées lors des préliminaires :
   a. Pour les n négatifs : en D2 on rentre la formule $(-h+1)^n$ ce qui donne « $=(-\$A\$2+\$A\$10)\,\hat{}\,(-B2)$ » . On copie cela jusqu'en B51.
   b. Pour les n positifs : en D52 on rentre la formule $(h+1)^n$ ce qui donne « $=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ». On copie cela jusqu'en B102.

5) Enfin on peut tracer l'approximation de la courbe cherchée :
   a. On sélectionne les colonnes C et D à partir de la deuxième lignes et on active le graphique « nuage de points ».
   b. Mettre la même échelle sur les axes et diminuer la valeur de h.

I. L'équation différentielle $y' = y$

Théorème :

Le problème différentiel $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

L'existence est délicate, et admise provisoirement (même si on pourrait le faire en utilisant des suites adjacentes).
L'unicité a été faite en TP.

Définition :

On appelle exponentielle l'unique fonction solution, sur $\mathbb{R}$, du problème différentiel $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$. On la note exp. Ainsi :

$\exp(0) = 1$ et pour tout réel $x : \exp'(x) = \exp(x)$

Propriétés :

1. Pour tout réel x : $\exp(-x) \times \exp(x) = 1$
2. Pour tout réel x : $\exp(x) \neq 0$
3. Pour tout réel x : $\exp(x) > 0$
4. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

1. et 2. Dans la démonstration de l'unicité de la solution du problème différentiel (cf TP), on a vu qu'une fonction f solution de $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ vérifie :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $c(x) = f(x)f(-x) = 1$ et $f(x) \neq 0$.

C'est donc le cas pour l'exponentielle.
3. La focntion exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus $\exp(0) = 1 > 0$. S'il existait un réel x_0 tel que $\exp(x_0) < 0$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait un réel c (compris entre 0 et x_0) tel que $\exp(c) = 0$, ce qui contredit 2.
Donc pour tout réel x : $\exp(x) > 0$
4. On a pour tout réel x : $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(x) > 0$
On en déduit que l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercices : Le Vrai/Faux p 118 (1-3 et 3)
Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a $\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y)$ (D p103)
N°12-13-14 p118

II. L'équation différentielle $y' = ky \quad (k \in \mathbb{R})$

Théorème :

Le problème différentiel $\begin{cases} y' = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution f sur $\mathbb{R}$ qui est définie par : $f(x) = y_0 \exp(kx)$.

Preuve :

Existence :

La fonction f, définie par $f(x) = y_0 \exp(kx)$ vérifie bien les conditions :

$f(0) = y_0 \exp(0) = y_0$ et $f'(x) = y_0 k \exp'(kx) = y_0 k \exp(kx) = kf(x)$

Unicité :

Soit g une solution quelconque de ce problème différentiel.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = g(x)\exp(-kx)$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$h'(x) = g'(x)\exp(-kx) + g(x)(-k)\exp(-kx) = kg(x)\exp(-kx) - kg(x)\exp(-kx) = 0$

Donc h est constante sur $\mathbb{R}$.

Comme $h(0) = g(0)\exp(0) = g(0) = y_0$, on a $h = y_0$ sur $\mathbb{R}$.

D'après les propriétés, on en déduit $g(x) = y_0 \exp(kx)$, donc $g = f$ sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve l'unicité.

Exercices :

D p 105 : Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$ on ait $2f'(x) + 3f(x) = 0$. Parmi celles-ci, démontrer qu'il n'en existe qu'une telle que $f(2) = 1$.

Faire aussi l'exercice sur les bactéries.

N°21-22-23-24-28 p 119

III. Relation fonctionnelle f(x+y)=f(x)f(y). Conséquences sur la fonction exponentielle.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un réel k tel que pour tout réel x : $f(x)=\exp(kx)$
2. Il existe un réel k tel que : $f'=kf$
3. Pour tous réels x et y : $f(x+y)=f(x)f(y)$

Rq : la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$ (obtenue pour $k=0$) vérifie toutes ces assertions.

Preuve :

$(1)\Leftrightarrow(2)$: déjà établie dans le théorème du II en prenant $y_0=1$

$(2)\Rightarrow(3)$: déjà fait en exercice pour $k=1$, c'est la même méthode. A y fixé, on prend $g(x)=\dfrac{f(x+y)}{f(x)}$ et on dérive, puis on calcule $g(0)$.

$(3)\Rightarrow(2)$: déjà fait en TP par moi.

On suppose (3) : pour tous réels x et y, on a : $f(x+y)=f(x)f(y)$.

En dérivant on obtient : $f'(x+y)=f'(x)f(y)$.

En particulier pour $x=0$ on a : $f'(y)=f'(0)f(y)$

En posant $k=f'(0)$, on a pour tout $y\in\mathbb{R}$: $f'(y)=kf(y)$.

Ainsi $f'=kf$. D'où (2).

Conséquence : La fonction exponentielle transforme les sommes en produits.

Pour tous réels x et y : $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$

Preuve : application du théorème pour $k=1$ ou alors fait en exercice.

Théorème :

Pour tout réel x et tout entier relatif n on a : $\exp(nx)=\left(\exp(x)\right)^n$

Preuve :

Pour tout entier naturel n, fait en exercice (ou alors faire une récurrence en utilisant le théorème précedent).

Supposons maintenant que $n\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$. On pose alors $m=-n\in\mathbb{N}$. D'après ce qui précède on peut écrire

$$\exp(nx)=\exp(-mx)=\left(\exp(-x)\right)^m=\left(\frac{1}{\exp(x)}\right)^m=\left(\exp(x)\right)^{-m}=\left(\exp(x)\right)^n$$

IV. Nouvelle notation

Notation : *Nombre* **e**

On note e le nombre exp(1) : $e = \exp(1)$

D'après le théorème précédent, on a alors pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$e^n = \left(\exp(1)\right)^n = \exp(n)$$

Comme l'exponentielle transforme les sommes en produits, on aura, pour tous entiers relatifs m et n :

$$e^{m+n} = \exp(m+n) = \exp(n)\exp(m) = e^n e^m$$

Notation :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose e^x le nombre $\exp(x)$: $e^x = \exp(x)$

Cette notation est légitime, elle ne fait que prolonger à tous les réels une propriété constatée sur les entiers (cela se prouve).
Avec cette nouvelle notation, résumons les propriétés que nous connaissons :

Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$ et tout n dans $\mathbb{Z}$:

$$\left(e^x\right)' = e^x$$
$$e^0 = 1$$
$$e^1 = e$$
$$e^x e^{-x} = 1$$
$$e^x > 0$$
$$e^x e^y = e^{x+y}$$
$$e^{x-y} = e^x e^{-y} = \frac{e^x}{e^y}$$
$$e^{nx} = \left(e^x\right)^n$$

Exemple : $\dfrac{\left(e^x\right)^3 e^{-2x}}{e^{5-x}} = e^{2x-5}$

Exercices : n°15-16-18 p 118 + n°25-26 p119 + n°57 p 122 (dérivation)

Propriété (à part) : $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$ on a $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Preuve : on a $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^1 = a$. D'où $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \Leftrightarrow a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

V. Etude de la fonction exponentielle

Théorème :

1. L'exponentielle est une fonction continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tous x et y de $\mathbb{R}$ on a : $x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Preuve :

1. Par définition de la fonction exponentielle (solution d'un problème différentiel, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction exponentielle est strictement croissante d'où l'équivalence.
3. On commence par montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $e^x > x$.

Soit $g(x) = e^x - x$. Alors $g'(x) = \left(e^x\right)' - 1 = e^x - e^0$.

Alors $x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow g'(x) \geq 0$.

On obtient :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $g(x) \geq 1 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq 1 + x$.

A fortiori : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $e^x > x$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x > \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

En posant $X = -x$ on a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$

Rq : la fonction exponentielle admet donc l'asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$

Corollaire :

La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Preuve : c'est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc on peut appliquer le corollaire du TVI : tout élément $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ admet un unique antécédent.

Conséquences :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	
$\exp(x)$	0	1	$+\infty$

Et $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$. D'où

Proposition -Définition :
Soit un réel k. L'équation $e^x = k$ admet une unique solution réelle, appelé $\ln k$.

Rq : En fait on a $e^{\ln k} = k$.

Exemples : $e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5 \qquad e^{-2x+3} = 4 \Leftrightarrow -2x+3 = \ln 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{3-\ln 4}{2}$

$e^{3x} < 4 \Leftrightarrow e^{3x} < e^{\ln 4} \Leftrightarrow 3x < \ln 4 \Leftrightarrow x < \dfrac{\ln 4}{3}$

Exercice :
Limites : n° 41 à 43 p 120 (+ E p 107)
Résolution d'équations et d'inéquations simples : n°33 à 39 p 120 et 47 à 50 p 121 (+ D p 107 et F 109)

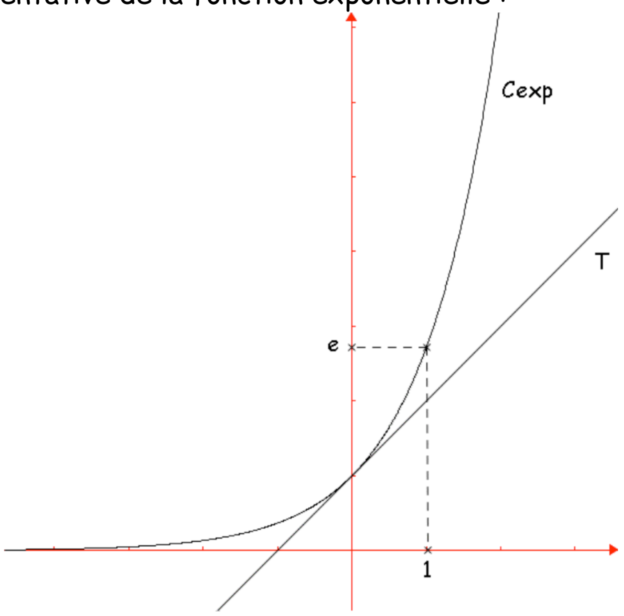
Approximation affine :
On a :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- L'approximation affine $e^h \simeq 1 + h$ quand h est proche de zéro.
- L'équation de la tangente au point $A(0;1)$ est la droite d'équation $y = 1 + x$.

Preuve : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \exp'(0) = 1$

On a $e^h = \exp(h) \simeq \exp'(0)h + \exp(0) = h + 1$ ce qui correspond à l'équation de la tangente au point d'abscisse 0, ie le point $A(0;1)$.

Voici la courbe représentative de la fonction exponentielle :



Théorème : *Croissance comparée*

> Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

Rq : on dit que l'exponentielle l'emporte sur les puissances.

En particulier pour $n=1$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

Preuve : Dans le cas n = 1.

Soit x un réel strictement positif. $\frac{e^x}{x} = \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\right)^2$. Or $e^{\frac{x}{2}} > \frac{x}{2} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} > \frac{\sqrt{x}}{2}$. Soit $\frac{e^x}{\sqrt{x}} > \frac{x}{4}$.

D'après le théorème des limites comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Soit x un réel strictement négatif : on pose X = -x. Alors :

$xe^x = -Xe^{-X} = \frac{-X}{e^X} = -\frac{1}{\frac{e^X}{X}}$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{X\to+\infty} -\frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0$.

Exemples : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+5x+1)e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - x}{2e^x+3} = \frac{1}{2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sqrt{x}} = 0$

Exercices : n°44 à 46 p 121 + 49 et 50

Théorème :

> Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction composée e^u est dérivable sur I et on a : $\left(e^u\right)' = u'e^u$

Rq : Les primitives d'une fonction du type $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions $F(x) = e^{u(x)} + k$ avec k réel.

Preuve : on utilise la dérivée d'une fonction composée.

Exemples : Dériver la fonction f suivante sur $\mathbb{R}$: $f(x) = e^{x^2+3x}$

Trouver une primitive de la fonction f suivante sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \cos x e^{\sin x}$

Faire des problèmes sur l'exponentielle :

N°63 – 64 p 122 + **4 p 114 TICE**

VI. Equation différentielle $y' = ay + b \quad (a,\ b \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$

Théorème :

Soient $a,\ b \in \mathbb{R}\ \ (a \neq 0)$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ du problème différentiel $y' = ay + b$ sont les fonctions du type :

$$f : x \mapsto Ae^{ax} - \frac{b}{a} \text{ où } A \in \mathbb{R}.$$

Si l'on ajoute la condition initiale $y(x_0) = y_0$, alors la solution est unique.

Preuve :

Pour tout réel A, la fonction $f : x \mapsto Ae^{ax} - \frac{b}{a}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = aAe^{ax} = a\left(f(x) + \frac{b}{a}\right) = af(x) + b$ pour tout réel x.

Donc f est bien solution du problème différentiel

Réciproquement : Comme la dérivée d'une constante est nulle, les constantes solutions du problème différentiel sont celles qui vérifient : $0 = ay + b \Leftrightarrow y = -\frac{b}{a}$.

Alors $f_0 : x \mapsto -\frac{b}{a}$ est l'unique fonction constante qui vérifie ce problème.

Si f est une solution du problème, alors pour tout réel x on a $f'(x) = af(x) + b$. Or $f_0'(x) = af_0(x) + b$, donc $f'(x) - f_0'(x) = a\left(f(x) - f_0(x)\right)$. La fonction $g = f - f_0$ vérifie donc $g' = ag$. Elle est donc de la forme : $g(x) = Ae^{ax}$ avec A réel. Ainsi f est de la forme : $f(x) = Ae^{ax} - \frac{b}{a}$.

Avec condition initiale on a $f(x_0) = Ae^{ax_0} - \frac{b}{a} = y_0 \Leftrightarrow A = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{-ax_0}$. La constante est entièrement déterminée donc unique.

Exercices : n°67 – 70 p 123, n°74 et 76 p 124 + pb sur les équations différentielles.