Chapitre 7 : Dérivée et Primitives

Au cours du XVIIe siècle, les mathématiciens se sont intéressés à de nouveaux problèmes auxquelles les méthodes classiques n'offraient pas de solution générale. Parmi ceux-ci :

- Le calcul de la vitesse instantanée d'un objet
- La recherche de la trajectoire d'un objet en mouvement (notion de tangente)
- Le calcul de la loneur de la trajectoire d'une planète
- Le calcul de l'aire délimité par des courbes

La résolution de ces problèmes permit l'éclosion de démarches originales qui donnèrent naissance, au début du XVIIIe siècle à une nouvelle forme de calcul le calcul infinitésimal. On peut considérer que les deux fondateurs de ce calcul sont le mathématicien anglais Newton et le philosophe allemand Leibniz, mais de manière indépendante. Ils ont notamment mis en évidence le fait que le problème des tangentes et le calcul des aires sont des problèmes inverses.

I. Dérivée : Rappels et Compléments

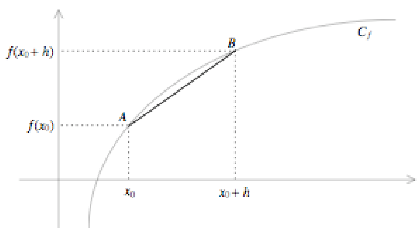
1) Définition & Interprétation

Travail de l'élève :

Le graphique ci-dessous représente le nombre de kilomètres parcourus par une automobile en fonction du temps en heure.

On appelle f la fonction distance ainsi définie sur un intervalle de temps I et C_f sa courbe représentative.

On s'intéresse à la vitesse du véhicule à partir du temps $x_0 \in I$ pendant une période h.



- Que vaut la vitesse moyenne de la voiture sur l'intervalle de temps $[x_0; x_0+h]$?

- Que représente graphiquement cette quantité ?
  Le coefficient de la sécante à la courbe C_f entre les points d'abscisses x_0 et x_0+h.

On appelle cette quantité l'**accroissement moyen** de la fonction f.

- Proposer une méthode pour avoir la vitesse instantanée du véhicule au temps x_0.

- Que représente graphiquement cette quantité ?

- Que représente pour la fonction f cette quantité ?

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I.

On dit que f est dérivable en x_0 ssi $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie. On note ce nombre $f'(x_0)$.

Exemple : On étudie la dérivabilité de la fonction racine carrée en 0.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$. La limite n'est pas finie.

La fonction racine carrée n'est donc pas dérivable en 0.

Définition :

Lorsqu'une fonction f admet un nombre dérivé en tout point x_0 d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I. On définit alors la fonction dérivée, notée f', qui à tout point x_0 de I associe le nombre dérivé $f'(x_0)$.

Les différentes interprétations du nombre dérivée et de la fonction dérivée :

- **Interprétation graphique** :

Le nombre dérivé x_0 en représente le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse x_0 (cf activité).

- **Interprétation numérique** :

Une petite variation h de x, notée Δx, provoque une petite variation $f(x+h)-f(x)$ de y, notée Δy.

On a $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, ce qui signifie $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x)$ où $\varepsilon(\Delta x)$ représente un terme complémentaire qui vérifie $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$.

On a donc $\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x.\varepsilon(\Delta x)$ avec $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$.

D'où l'approximation : $\Delta y \simeq f'(x)\Delta x$ ou encore $f(x+h) \simeq f(x) + f'(x)h$

Exemple : Pour la fonction cube, on a $(1+h)^3 \simeq 1^3 + 3.1^2 h$, d'où $(1+h)^3 \simeq 1+h$

Notation : Symboliquement on note $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dx}$

Exercices : n°12 p84

- **Détermination d'une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse x_0**

Soit $M(x;y)$ un point quelconque de cette tangente T distinct du point d'abscisse x_0. Le coefficient directeur de la tangente T est $f'(x_0)=\dfrac{y-f(x_0)}{x-x_0}$.

D'où une équation de T :	$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

Rq : On constate que l'équation de la tangente n'est autre que l'approximation affine de f en x_0 (en posant $x=x_0+h$).

Exemple : On donne $f(x)=-x^2+3$, on cherche une équation de la tangente T au point d'abscisse $x_0=2$. On calcule $f(2)=-1$ et $f'(x)=-2x$ donc $f'(2)=-4$.
D'où l'équation de T est : $y=-1-4(x-2)=-4x+7$.

- **Interprétation cinématique** : (cf activité)

Si f représente la loi horaire d'un mobile en déplacement, la vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et t_0+h est alors : $\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$.

La vitesse instantanée du mobile au moment t_0 est donc donnée par :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}=f'(t_0)$$

Remarque : sur le même principe de démonstration, en dérivant une seconde fois, on obtient l'accélération du mobile.

Exercice : n°38 p86

Dans toute la suite du chapitre, f désignera une fonction dérivable sur un intervalle I.

2) Lien dérivée / fonction

Théorème (admis) :

- f est constante sur I ssi $f'=0$ sur I.
- f est croissante (resp. décroissante) sur I ssi $f'\geq 0$ (resp. $f'\leq 0$) sur I.

Théorème : *une condition nécessaire pour que f ait un extremum local en x_0*

Si f admet un extremum local en un point x_0 intérieur à I, alors $f'(x_0)=0$

Rq : si x_0 est une borne de I, on peut avoir un extremum en x_0 sans nécessairement avoir $f'(x_0)=0$.

Théorème : *une condition suffisante pour que f ait un extremum local en x_0*

Si f' s'annule en un point x_0 intérieur à I en changeant de signe alors f a un extremum local en x_0.

Rappel :

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I. (réciproque fausse)

Travail de l'élève :

Activité 1 p 71 (long : ne faire que le 1°a-b et 2°a-b)

Théorème :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$.
La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $(v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x))$

Preuve : Soit $x_0 \in I$. On écrit :

$$\frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0} = \frac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}. \qquad \left(\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du}\frac{du}{dx}\right)$$

On pose $y_0 = u(x_0)$ et $y = u(x)$, ainsi :

$$\frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0} = \frac{v(y) - v(y_0)}{y - y_0} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$$

Or v est dérivable en $y_0 \in u(I)$, et u est dérivable en $x_0 \in I$, ainsi :

$$\lim_{y \to y_0} \frac{v(y) - v(y_0)}{y - y_0} = v'(y_0) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0)$$

D'où

$$(v \circ u)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0} = v'(y_0) \times u'(x_0) = u'(x_0).v'(u(x_0))$$

Ceci étant valable pour tout $x_0 \in I$, on en déduit la dérivabilité sur I :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x))$$

Conséquences :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si $f = \sqrt{u}$ (où u est strictement positive sur I) alors f est dérivable sur I et $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
Si $f = u^n$ (où $n \in \mathbb{Z}^*$ et u ne s'annulant par sur I si $n \leq -1$) alors f est dérivable sur I et $f' = nu'u^{n-1}$

Exemples :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

On peut écrire $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + x$, qui est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

S'il n'y a pas d'ambiguité avec les intervalles, on finit par ne plus préciser la composition :

$$g(x) = \left(2x^2 - x + 1\right)^6 \qquad \text{alors} \qquad g'(x) = 6(4x-1)\left(2x^2 - x + 1\right)^5$$

Exercices : n° 21-22-23-27-29 p 85

Résumé :

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de définition de f'
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$; $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*_+$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*_+$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\}$
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = -\omega\sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = \omega\cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \tan(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = \omega(1 + \tan^2(\omega t + \varphi))$	$\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{t} ; k \in \mathbb{Z}\}$

OPÉRATIONS SUR LES DÉRIVÉES lorsque u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I		
Fonction	Dérivée	Conditions
$u + v$	$u' + v'$	
ku (k : constante)	ku'	
uv	$u'v + uv'$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
u^n $(n \in \mathbb{Z})$	$n\,u'\,u^{n-1}$	$u > 0$ sur I si $n \leqslant 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I
$v \circ u$	$u'\,(v' \circ u)$	

3) Etude de fonction

Lorsqu'on demande d'étudier une fonction f, on demande en fait de déterminer son ensemble de définition D_f, sa fonction dérivée f' et son tableau de variations complet.

Exercices : n°41-42-43-44-45-46-48-49 p 87

DM : Etude de la fonction tangente (constantini p14)

II. Primitives

Travail de l'élève : D Activité 2 p 71

Une automobile roule sur une autoroute rectiligne à 90 km/h. En maintenant une accélération constante pendant 5 secondes, elle atteint une vitesse de 135 km/h.
On veut calculer la distance d parcourue pendant ces 5 secondes.
Dans ce but, on prend pour origine des temps en seconde, l'instant où elle commence à accélérer et $x(t)$ la distance, en mètres, parcourue entre les instants O et t.
On rappelle que la vitesse $v(t)$, en m/s, à l'instant t est $v = \frac{dx}{dt}$ et que l'accélération constante, exprimées en m/s^2, est $a = \frac{dv}{dt}$.

1) Calculer a.
2) A) Déterminer une fonction f dérivable sur $[0;5]$ telle que $\frac{df}{dt} = a$

   B) En déduire que $v(t) = 2,5t + 25$ sur $[0;5]$.
3) Déterminer l'expression de $x(t)$ en fonction de t et calculer la distance d.

Définition :

> Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
> On appelle ***primitive*** de f toute fonction F dérivable sur I et telle que :
> Pour tout réel x de I, $F'(x) = f(x)$

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + \cos x$.
On peut prendre par exemple $F(x) = x^3 - x^2 + \sin x$, ou encore $F(x) = x^3 - x^2 + \sin x + 24$.

Remarque : En fait, si f admet une primitive, elle en admet une infinité.

Théorème (admis) : *une condition suffisante*

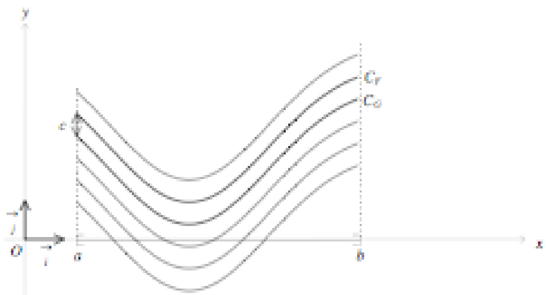
> Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Proposition :

Soient F et G deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I.
Alors F et G diffèrent d'une constante : $F(x) = G(x) + k \quad (k \in \mathbb{R})$, pour tout $x \in I$.

Preuve :
On a $F' = G' = f$ sur I, par conséquent $F' - G' = 0$ sur I. Or $F' - G' = (F - G)'$. Donc $(F - G)' = 0$ sur I. Les seules fonctions qui ont une dérivée nulle sont les fonctions constantes, d'où sur I $F - G = k$ ou k est une constante.

Graphiquement :



Proposition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient deux réels x_0 et y_0.
Il existe une unique primitive F de f sur I satisfaisant la condition initiale $F(x_0) = y_0$

Preuve :
D'après le théorème, comme f est continue sur I, elle admet une primitive G sur I. D'après la proposition, toutes les primitives F de f sur I sont de la forme $F = G + k$ où k est une constante. La condition $F(x_0) = y_0$ impose $k = y_0 - G(x_0)$.
La constante k est déterminée de manière unique, ce qui démontre la proposition.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Trouver l'unique primitive F de f telle que $F(0) = 2$.

En remarquant que $f(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$, on reconnaît l'expression dérivée de $\sqrt{x^2+1}$.

Les primitives F de f sur I sont de la forme $F(x) = \sqrt{x^2+1} + k$. On veut alors $\sqrt{0^2+1} + k = 2 \Leftrightarrow k = 1$.

Conclusion : la primitive cherchée est la fonction $F(x) = \sqrt{x^2+1} + 1$

Tableaux de Primitives Usuelles et d'Opérations sur les Primitives :

Fonction f	Fonction primitive F (c = constante)	Intervalle I
$f(x) = k$ (constante)	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$ et $n \neq -1$)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$; $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ si $n \leqslant -2$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$	$]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$	$F(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$	$F(t) = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = ?$ (Attendre le chapitre sur la fonction logarithme néperien)	

OPÉRATIONS SUR LES PRIMITIVES lorsque u et v sont des fonctions continues sur un intervalle I		
Fonction	une primitive	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	
ku' (k : constante)	ku	
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$u \neq 0$ sur I si $n \leqslant 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\frac{v'}{v^2}$	$-\frac{1}{v}$	$v \neq 0$ sur I
$u'(v' \circ u)$	$v \circ u$	

Exemples : Trouver **une** primitive de :

- $g(x) = \tan^2 x$ (Remarquer que $g(x)+1 = \tan^2 x + 1$)
- $f(x) = 2\sin(3x) - 3\cos(2x) + 4 + \tan^2 x - \dfrac{3}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x^2}$ pour $x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice :

Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$. Calculer $F'(x)$. Qu'a-t-on démontré ?

D n°52-59-60 p88 et n°61-64 ? p 89 et n°74 p 91

En DS (1h) : calcul de 3-4 dérivées + ex 4 (voire 6-7-8-10) de fiche exo primitives constantini