Etude d'une suite arithmético-géométrique.
Passage à l'euro.

1. Chaque année, la grand-mère de Ana a déposé de l'argent dans une tirelire afin de constituer une cagnotte pour sa petite-fille.
Elle a commencé le 1er janvier 1982 par un dépôt de 500Frs. Depuis lors, elle a effectué un dépôt chaque 1er janvier, en augmentant chaque année le montant de ce dépôt de 50Frs.
On note :

- u_n le montant, exprimé en francs, de la somme déposée dans la tirelire le 1er janvier de l'année (1982 + n). Ainsi $u_0 = 500,\ \ u_1 = 550$ ...
- s_n le montant, en francs, de la somme contenue dans la tirelire après le dépôt de l'année (1982 + n). Ainsi $s_0 = 500,\ \ s_1 = 1050$ ...

a) Calculer u_2, puis exprimer u_n en fonction de n.
b) Calculer s_2, puis exprimer s_n en fonction de n.
c) Le 1er janvier 2002, la grand-mère d'Ane effectue son dépôt habituel (en francs), puis offre la tirelire à Ana. Quel est le montant de la somme reçue par Ana ? Exprimer cette somme en francs, puis en euros. (Rappel : 1 euro correspond à 6,55957 francs)

2. Avec le cadeau de sa grand-mère, Ana décide d'ouvrir un compte bancaire et d'y placer la plus grand partie de la somme qu'elle a reçue.
Le 1er janvier, elle effectue un placement de 3000 euros, à intérêts composés, au taux annuel de 4% (à la fin de chaque année, les intérêts sont incorporés au capital).
De plus, chaque 1er janvier des années quivantes, il décide d'ajouter sur son compte la somme de 200 euros. On note :

- c_n le montant, exprimé en euros, du capital disponible sur le compte bancaire d'Ana après n années de placement ($c_0 = 3000$)
- $\left(u_n\right)$ la suite définie par $u_n = c_n + 5000$ ($u_0 = 8000$)

a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $c_{n+1} = 1{,}04c_n + 200$.
b) Démontrer que $\left(u_n\right)$ est uns suite géométrique dont on précisera la raison.
c) Exprimer u_n en fonction de n, puis c_n en fonction de n.
d) Combien d'années, au minimu, Ana devra-t-elle attendre pour disposer d'une somme de 6000 euros sur son compte bancaire ?

<u>Rapide rappel sur les suites arithmétiques et géométriques :</u>

<u>Définition</u> : Une suite $\left(u_n\right)$ est dite ***arithmétique*** s'il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait : $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé la raison de la suite $\left(u_n\right)$.

<u>Théorème</u> : Soit $\left(u_n\right)$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors pour tous p et $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_p + (n-p)r$. En particulier $u_n = u_0 + nr$.

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut :

$$S = \text{nb termes}\frac{\text{1er terme + dernier terme}}{2}$$

<u>Définition</u> : Une suite $\left(u_n\right)$ est dite ***géométrique*** s'il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait : $u_{n+1} = qu_n$. Le réel q est appelé la raison de la suite $\left(u_n\right)$.

<u>Théorème</u> : Soit $\left(u_n\right)$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Alors pour tous p et $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_p q^{n-p}$. En particulier $u_n = u_0 q^n$.

Pour tout réel $q \neq 1$ on a : $$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$