# Fiche d'exercice sur les suites

**Exercice 1** : On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = a, \ a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = 2u_n + 3$.

1°) On suppose dans cette question $a = 2$. Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$. Démontrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la suite $(u_n)$ est une suite croissante.

2°) On suppose a = -3 . Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$. Que peut-on dire de la suite $(u_n)$ ? (Justifier)

3°) On suppose a = -5 . Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$. Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**Exercice 2** : On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0 \quad et \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$ . Placer les points correspondants sur une droite graduée.
2. Démontrer que la suite $(u_n)$ est bornée, puis que la suite $(u_n)$ est croissante.
3. Que peut-on conjecturer pour la limite de la suite $(u_n)$ ?

**Exercice 3** : On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 2 \quad et \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Représenter graphiquement $(u_n)$.
2. Donner les valeurs approchées à $10^{-3}$ près de $u_1$, $u_2$,………, $u_{10}$ .
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le 3$.
4. Démontrer que la suite $(u_n)$ est convergente.
5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**Exercice 4** :

On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Donner les valeurs de $u_0$, $v_0$, $u_1$, $v_1$, $u_2$, $v_2$, $u_3$, $v_3$, $u_4$,$v_4$.
2. Démontrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.
3. Quelle est leur limite ?
4. Que peut-on dire du nombre dont l'écriture décimale est $0,\underline{9}$ ?

**Exercice 5** : On considère la suite $(u_n)_{n\ge1}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$, et la suite $(v_n)_{n\ge1}$ définie par $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

1. Démontrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.
2. Soit $l$ leur limite. Donner un entier $p$ pour lequel l'encadrement de $l$ par $u_p$ et $v_p$ est un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à $10^{-3}$.
   En utilisant une calculatrice, donner une valeur approchée de $u_p$ et $v_p$.
3. Est-il possible que l soit égal à $\frac{\pi^2}{6}$ ?

**Exercice 6** : On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{4}, \textit{ pour tout entier naturel } n \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n + 1}{4}, \textit{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, placer sur l'axe des abscisses les réels $u_1$, $u_2$, $u_3$, $v_1$, $v_2$ et $v_3$.
2. Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$ puis $v_1$, $v_2$ et $v_3$.
3. Démontrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes et donner leur limite.