Chap 6 : Les suites

Travail de l'élève :

1. Retrouver la définition d'une suite.

2. Proposer différents moyens de définir le terme général d'une suite : explicitement / par récurrence

3. À partir de la définition, proposer des points d 'étude pour mieux connaître le comportement d'une suite. Discuter chacun d'eux. Proposer des méthodes.

I. Comportement global d'une suite

1) <u>Rappels</u> *(sur cahier d'exercices)*

<u>**Définition**</u> :

> Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang.

Exemples :

La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ (du type $u_n = f(n)$)

La suite (v_n) définie par $u_1 = 2$ et $v_{n+1} = -3v_n + 1$ pour tout $n \geq 2$ (par récurrence)

<u>**Représentation graphique :**</u>

a) Lorsqu'il s'agit d'une suite définie explicitement, on peut calculer les premiers des termes individuellement. On obtient alors un nuage de points $M_n(n;u_n)$ dans un repère.

b) Lorsque qu'il s'agit d'une suite définie par récurrence, on préfère représenter ses premiers termes sur un axe en s'appuyant sur la courbe représentative de la fonction f définissant la relation de récurrence. On obtient alors un diagramme « en escalier ou en escargot » :
   - On trace les représentations graphiques de f et de la droite d'équation $y = x$.
   - On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses.
   - On utilise C_f pour construire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées
   - On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la première bissectrice
   - On utilise C_f pour construire $u_2 = f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées, etc

2) Sens de variation

Définition :

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

La suite (u_n) est dite ***croissante*** à partir du rang n_0, si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$

La suite (u_n) est dite ***décroissante*** à partir du rang n_0, si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Idem pr strictement, monotone, stationnaire et constante.

Rq : il existe des suites qui ni sont ni croissantes, ni décroissantes comme $u_n = (-1)^n$

Méthodes:

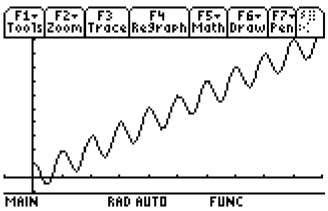
- On peut comparer directement u_n et u_{n+1} grâce aux propriétés des inégalités.
- On peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$
- Si tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, on peut comparer à 1 le quotient $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$.
- Si la suite (u_n) est définie au moyen d'une fonction f par $u_n = f(n)$, on peut étudier les variations de la fonction f
- Si la suite est définie par ***récurrence***, on peut utiliser une démonstration par récurrence.

Exemples :

Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 0$ par $u_n = 2n + \sin n$

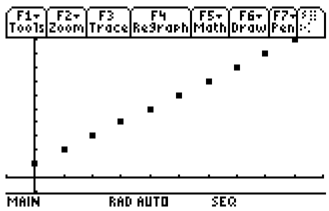
Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+5}$

Attention : la suite peut être croissante alors que la fonction ne l'est pas. (voir représentations graphiques ci-dessous)



$f(x) = \cos(2\pi x) + x$

La fonction n'est pas croissante



$u_n = \cos(2\pi n) + n$

La suite est croissante

Exercices : D n° 32 - 34 p 179 . Exo 1 de la fiche

3) Bornes

Définitions :

Une suite (u_n) est majorée, s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$, pour tout n.
Une suite (u_n) est minorée, s'il existe un réel m tel que $m \leq u_n$ pour tout n.
Une suite (u_n) est bornée lorsqu'elle est minorée et majorée :
il existe des réels M et m tels que $m \leq u_n \leq M$ pour tout n.

Méthodes :
- On peut manipulation d'inégalités
- Si la suite (u_n) est définie au moyen d'une fonction f par $u_n = f(n)$, on peut étudier les extrema de la fonction f
- On peut faire un raisonnement par récurrence.

Exemples : $u_n = \dfrac{(-1)^n + \sin n}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$: $-2 \leq u_n \leq 2$

$v_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+5}$: f est croissante, $f(0) = \dfrac{1}{5}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} = 2$

$w_{n+1} = \sqrt{6 + w_n}$ avec $w_0 = 0$: $0 \leq w_n \leq 3$

II. Suites convergentes : compléments

1) Rappels

Défintion :

*On dit qu'une suite **converge** vers un réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*
On dit qu'une suite diverge vers $+\infty$ si tout intervalle du type $]\lambda;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Théorème :

Une suite qui converge est bornée.

Preuve : en DM + contre-exemple
Si (u_n) converge vers l alors pour l'intervalle ouvert $I =]l-1;l+1[$ à partir d'un certain rang que l'on note N tous les termes de la suite sont dans cet intervalle.
Soit M le plus grand des réels parmi $u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}$ et $l+1$. Soit p un entier quelconque :
- Si $p \leq N-1$ alors par définition de M, $u_p \leq M$
- Si $p \geq N$ alors $u_p \in]l-1;l+1[$ et donc $u_p \leq M$.

Dans tous les cas on a $u_p \leq M$: la suite est majorée. (Minoration idem)

2) Suites monotones

Théorème : (admis)

> Une suite croissante majorée est convergente
> Une suite décroissante minorée est convergente.

Remarque : ce théorème ne permet pas de déterminer la limite.
D'après les propriétés vues sur les limites, si une suite est majorée par M, sa limite, si elle existe, est obligatoirement inférieure ou égale à M.

Propriété :

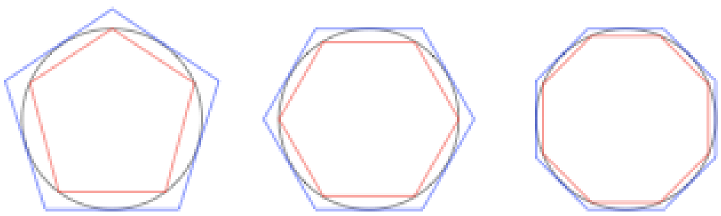
> Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$
> Une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$

Preuve : D p 49 (application C)
Soit un intervalle de la forme $]A;+\infty[$. Comme la suite n'est pas majorée par A, il existe un entier p tq $u_p > A$. Comme la suite est croissante, à partir de ce rang, tous les termes sont plus grand que A et sont donc dans l'intervalle.

Remarques :
Une suite ***non majorée*** n'a pas forcément pour limite $+\infty$: $u_n = \left[(-1)^n + 1\right]n$
Une suite qui admet ***pour limite*** $+\infty$ n'est pas forcément croissante : $u_n = n + 1 + (-1)^n$
Lorsqu'une suite définie par récurrence est ***convergente***, la relation de récurrence permet de déterminer une relation vérifiée par la limite.
Pour l'exercice 3 de la fiche, on peut écrire la relation pour la limite l : $l = \sqrt{2l+3}$.

3) Suites adjacentes

L'un des premiers travaux portant sur les suites de nombres semble provenir **d'Archimède**.
Dans son traité « la mesure du cercle », pour trouver une valeur approchée de π, il avait la brillante idée de considérer des **polygones réguliers inscrits** et **circonscrits** à une cercle de rayon 1 : d'abord deux traingles équilatéraux, puis deux carrées, deux pentagones, etc.



Comme on peut le voir sur la figure, plus le nombre de côtés du polygone inscrit est grand, plus son périmètre est proche de celui du cercle tout en lui restant inférieur (inversement pour le polygone circonscrit).

Les périmètres de ces polygones forment alors **deux suites** de nombres qui encadrent la circonférence du cercle, ie 2π (D n°79 p 186 : rapidité de convergence). Ceci rappelle la méthode de **dichotomie** vue précédemment.
Comme Archimède, de nombreux scientifiques (Fibonacci, Bernoulli, Newton…) se sont intéressé aux suites pour **approcher des valeurs numériques**.
C'est au XIXe que Cauchy pose les fondements de la théorie des suites, et qu'apparaît la notation indicielle. Peano définit alors une suite comme une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Le travail de l'élève

Première partie

On considère la courbe (*C*) de la fonction inverse : $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \in [1;2]$.
On voudrait trouver une valeur approchée de l'aire comprise entre (*C*), l'axe (*Ox*) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

On découpe l'intervalle [1 ; 2] en n intervalles de même amplitude.

1. Donner les valeurs x_0, x_1, ……, x_n des bornes des intervalles.
2. Déterminer les images de ces valeurs par f.
3. En considérant les aires des n rectangles dont l'un des sommets est sur la courbe (*C*), déduire, en fonction de n, l'expression de l'aire grisée sur chacun des dessins ci-contre.

Deuxième partie

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \dfrac{1}{n+i}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

et la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n-1} \dfrac{1}{n+i}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4 et en donner des valeurs à 10^{-2} près. Représenter les points correspondants sur une droite.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.
3. Calculer $v_n - u_n$ et démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.
4. Quelle conjecture peut-on faire pour les suites (u_n) et (v_n) ?
5. En utilisant une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_{50} et v_{50} puis de u_{150} et v_{150}.

Définition

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque :

- (u_n) est une suite croissante ;
- (v_n) est une suite décroissante ;
- $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Propriété :

Si (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.
De plus pour tout n : $u_n \le u_{n+1} \le l \le v_{n+1} \le v_n$

Preuve : Montrons tout d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \le v_n$.
Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$: $w_n = v_n - u_n$.
On a : $w_{n+1} - w_n = \left(v_{n+1} - v_n\right) - \left(u_{n+1} - u_n\right) \le 0$. Donc $\left(w_n\right)$ est décroissante.
Ainsi pour tout entier $m \ge n$ on a $w_n \ge w_m$.
Or par hypothèse la suite $\left(w_n\right)$ tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$. D'où $w_n \ge 0$ ie $u_n \le v_n$. On en déduit alors $u_0 \le u_n \le v_n \le v_0$.
Grâce au théorème de la limite monotone, on a que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes respectivement vers l et l'.
En écrivant $u_n = v_n + \left(u_n - v_n\right)$ et en passant à la limite on obtient $l = l'$.
Facultatif : Supposons qu'il existe un n_0 tel que $u_{n_0} > l$.
Posons $L = \dfrac{l + u_{n_0}}{2}$ alors $l < L < u_{n_0}$. Comme (u_n) est croissante, on a : $\forall n \ge n_0,\ L < u_n$. Par passage à la limite $L \le l$ ce qui contredit l'hypothèse $L > l$. Donc nécessairement $u_n \le l$. Idem pour $\left(v_n\right)$. D'où :

$$u_n \le u_{n+1} \le l \le v_{n+1} \le v_n$$

D n°5 p174 : Démontrer le théorème des valeurs intermédiaires en DM
D n°56 p 182 : Equivalence entre th des suites croissantes maj et des suites adj

D n° 2 p 172 : suite arithmético-géométrique + exo 2 fiche 2
D n° 4 p 173 : approximation d'un réel (bof)
D n°52 p 181 : convergence vers **e** mais aussi rapidité de convergence en choisissant $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$. Rajouter la question : déterminer dans les deux cas 7 décimales de leur limite notée **e**. Compléter des exos au tableur en encadrant $(u_n - l)$

N°57 p 182