Etude de fonction : notion de continuité

Leur faire lire des rappels sur les fonctions pour le jour en question.

Toutes les fonction considérées dans ce chapitre sont définies sur $\mathbb{R}$ *ou une partie de* $\mathbb{R}$ *et sont à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

I. Notion de continuité

Définition :

Soient I un intervalle et f une fonction définie (au moins) sur I et $a \in I$.
On dit que f est continue en a lorsque f admet une limite en a égale à f(a) :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I.

Rq : f est continue en a ssi $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

Graphiquement, cela signifie que l'on peut tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle I sans avoir à lever le crayon.

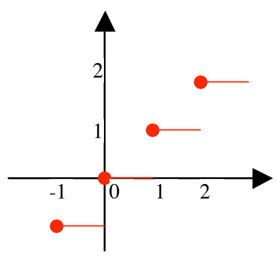
Exemples :

1) Soit f la fonction définie sur $I =]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
La fonction f est continue en 2 car $f(2) = 1$ et $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$. Plus généralement f est continue sur I.

2) La fonction « valeur absolue » est continue sur malgré $\mathbb{R}$ l'angle en 0.

Contre-exemples :

La fonction partie entière, notée E est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
E(*x*) est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à *x*.
Par exemple, E(2,3) = 2 ; E(2) = 2 ; E(2,9999)= 2
Cette fonction est continue sur [1 ; 2 [et [2 ; 3 [,
mais elle n'est pas continue sur [1 ; 3 [.



Théorème :

- Toute fonction **polynôme** est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction **racine carrée** est continue sur $[0;+\infty[$.
- Toute fonction construite par opérations ou par composition à partir des précédentes est continue sur les intervalles qui forment son ensemble de définition. C'est le cas des fonctions **rationnelles** et de la fonction **tangente**.

Exemples :

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x - 3 & \text{si } x < 2 \\ f(x) = x^2 - 5 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

f est une fonction affine sur l'intervalle $]-\infty;2[$. Elle est donc continue sur $]-\infty;2[$.
f est une fonction polynôme sur l'intervalle $]2;+\infty[$. Elle est donc continue sur l'intervalle $]2;+\infty[$.
Pour démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, il suffit de prouver qu'elle est continue en 2, ie que $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} f(x) = f(2)$.
Or $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} x - 3 = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} x^2 - 5 = -1$.
Donc f est bien continue sur $\mathbb{R}$

2) La fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{x^2 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (explication orale)

<u>Propriété</u> :

> Soit f une fonction définie (au moins) sur I et $a \in I$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Preuve : Si f est dérivable en a alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ donc
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} (x-a)f'(a) + f(a) = f(a)$. CDFD

Rq : réciproque fausse (c-ex : valeur absolue)

En pratique : si on trouve f non continue en a alors elle n'est pas dérivable en a

<u>Tableau de variation d'une fonction continue :</u>
Par convention, les flèches obliques du tableau des variations d'une fonction f traduisent la continuité et la stricte monotonie de f sur l'intervalle correspondant.

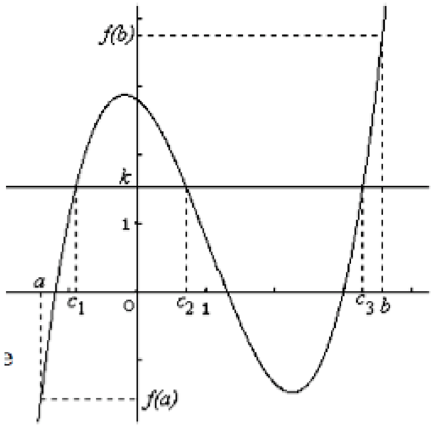
x	-7		-1		3		9
g	5	↘	-1	↗	10	↘	5

II. Théorème des valeurs intermédiaires

1) Le théorème

Théorème :

Soient I un intervalle, a et b dans I tels que $a < b$.
Soit f une application **continue** sur l'intervalle I.
Soit λ un réel compris entre f(a) et f(b).
Alors :
Il **existe** (au moins) un réel α dans $[a;b]$ tel que $f(\alpha) = \lambda$



Preuve : utilise les suites donc plus tard (DM ?)

Exemple :
Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair. Quelle est la limite de P en $+\infty$ et en $-\infty$?
Montrer alors la propriété :
Toute fonction polynôme P (à coefficient réel) de degré impair admet (au moins) une racine réelle.

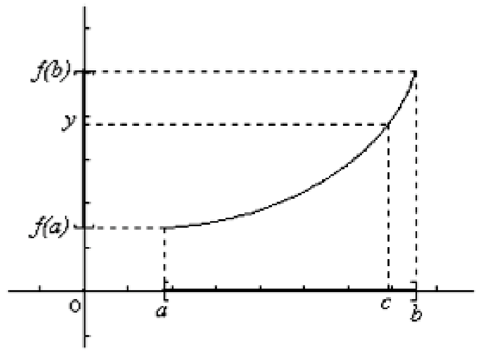
C-ex :
Essayer d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction « partie entière » avec $a = 0, b = 1, \lambda = \frac{1}{2}$.

2) Un corollaire

Corollaire :

Si f est une fonction **continue** et **strictement croissante** (resp. strictement décroissante) sur l'intervalle $[a;b]$.

- L'image de I par f est l'intervalle $[f(a);f(b)]$ (resp. $[f(b);f(a)]$)
- Pour tout λ dans $[f(a);f(b)]$ (resp. $[f(b);f(a)]$) l'équation $f(x) = \lambda$, d'inconnue x a **une unique solution** dans I.



Preuve : *on ne démontrera ce corollaire que dans le cas où f est strictement croissante.*

1) Puisque f est strictement croissante sur I, pour tout réel x dans I, on a $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.
   Donc toute image $f(x)$, c'est-à-dire tout nombre de $f(I)$ est dans $[f(a); f(b)]$. **Réciproquement,** si y est dans $[f(a); f(b)]$, y est l'image par f d'au moins un réel α de I (TVI), donc y est dans $f(I)$
2) En outre, l'équation $f(x) = \lambda$ ne peut avoir deux solutions car f étant strictement croissante, deux nombres distincts ont des images distinctes.

<u>Extension au cas d'un intervalle quelconque :</u>

> Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors pour tout réel λ appartenant à l'intervalle $f(I)$ l'équation $f(x) = \lambda$ a une unique solution dans l'intervalle I

Rq : On peut donc avoir I ouvert, semi-ouvert, borné ou non borné.

Rq : Lorsque f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, chaque élément de I a donc une **unique** image, et chaque élément de $f(I)$ un unique antécédent. On dit que f réalise une **bijection** de I sur $f(I)$.

Exemple : Soit $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(]1;2[) =]1;4[$ mais $f(]-1;2[) =]0;4[$.

C-ex : Si $f(x) = E(x)$ on a $f([0;1]) = \{0;1\}$

En résumé : lorsque f est une fonction définie sur un intervalle I et lorsque $\lambda \in f(I)$, l'hypothèse de continuité de f fournit l'existence d'au moins une solution (dans I) de l'équation $f(x) = \lambda$.
Si de plus on ajoute l'hypothèse de la stricte monotonie de f, alors nous sommes assurés de l'unicité de cette solution.

Attention, cela nous permet d'affirmer l'existence de solution(s), mais pas de les déterminer.
Une fois qu'on connaît leur existence, on en cherche en général une approximation. Pour cela, on utilise typiquement plusieurs méthode, dont deux sont présentées ici.

III. Approximation des solutions d'une équation

Exemple :
La fonction *f* définie sur $[1;2]$ par $f(x)=x^3+x$ est strictement croissante. Elle réalise une bijection sur $[f(1);f(2)]=[2;10]$. Donc, l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution α dans $[1;2]$.

On cherche à connaître α à 10^{-1} près.

1) Balayage

Le balayage consiste à calculer $f(x)$, pour x allant de 1 à 2, tous les 10^{-1} (appelé le pas).

- On rentre la fonction dans la calculatrice :
  Y = Menu + Graph
- On fait un tableau avec la première valeur de x et le pas voulu :
  Dans Table + Tblset (jaune+F4) Menu + Table + F5
- On recherche 2 valeurs successives pour lesquelles les images encadrent 10

x	$f(x)$
1	2
1,1	2,431
1,2	**2,928**
1,3	**3,497**
1,4	4,144

On trouve $f(1,2)=2,928$ et $f(1,3) = 3,497$.

Donc, $\alpha \approx 1,2$.

Exemple :
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(1+x)^3+x$.
Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-1;0]$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

2) Dichotomie

La **dichotomie** consiste à calculer $f(x)$ en prenant pour x le centre de l'intervalle de départ. On peut alors se ramener à un intervalle d'amplitude réduite de moitié (à la n^ième^ étape, on aura diviser l'amplitude de départ par 2^n). On réitère le processus jusqu'à l'amplitude voulue.
En fait, $f\left(\frac{1+2}{2}\right)=f(1,5)=4,875>3$. Donc $\alpha \in [1;1,5]$.
$f(1,25)\approx 3,20>3$. Donc $\alpha \in [1;1,25]$. $f(1,125)\approx 2,55<3$. Donc $\alpha \in [1,125;1,25]$.
$f(1,1875)\approx 2,86$. Donc $\alpha \in [1,1875;1,25]$. L'amplitude est inférieur à 10^{-1}. Donc $\alpha \approx 1,2$.

Illustration graphique :

Grâce à la calculatrice, la méthode de balayage est plus rapide en générale. Cependant quand l'amplitude de l'intervalle de départ est grande ou quand l'approximation demandée est très petite, il est intéressant de commencer par réduire l'intervalle par dichotomie, puis de finir l'approximation par balayage.

Exemple : D n°69 p 35
Dénombrer les solutions réelles de l'équation : $x^5 - 5x + 1 = 0$ et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

Solution : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x + 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

D'après le tableau de variations de la fonction f, f est strictement croissante sur $]-\infty;-1]$. De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) < 0$ et $f(-1) = 5 > 0$. Donc $f(x) = 0$ admet une unique solution α_1 dans $]-\infty;-1]$.
Or $f(-5) = -3099 < 0$. Par dichotomie, on se ramène à l'intervalle $[-3;-1]$, puis $[-2;-1]$, enfin $[-2;-1,5]$.
Par balayage, on trouve alors $\alpha_1 \in]-1,55;-1,54[$

Idem pour les autres. On trouve $\alpha_2 \in]0,20;0,21[$ et $\alpha_3 \in]1,44;1,45[$

IV. Notion de fonction réciproque ????

Définition :

> Soit E et F deux ensembles quelconques et f une fonction telle que $f : E \to F$.
> On dit que f est une ***bijection*** de E sur F ssi pour tout y de F **il existe un unique** x de E tel que $f(x) = y$.
> On peut alors définir une fonction $g : F \to E$ de la manière suivante : si y est un réel de F tel que y = f(x), alors on pose $g(y) = x$.
> On dit que g, définie sur F à valeurs dans E, est la fonction ***réciproque*** de f. On la note souvent f^{-1}.

Rq : Il en résulte que pour tout réel $x \in E$, $g\left[f(x)\right] = x$ et pour tout $y \in J$, $f\left[g(y)\right] = y$.

Rq : La fonction réciproque de g est la fonction f.

Théorème (admis) :

> Toute fonction continue strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur f(I) = J.
> La bijection réciproque f^{-1} est aussi **continue** sur J et **monotone**, de même sens de variation que f.
> Les courbes représentatives sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

Technique de détermination de la fonction réciproque : (sur un exemple)

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

On montre facilement que f est continue et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$. Elle admet donc une bijection réciproque qui est définie sur $f\left(]1;+\infty[\right) =]2;+\infty[$. Pour la déterminer, on note $y = f(x)$ puis on exprime x en fonction de y :

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} xy - y = 2x+1 \Leftrightarrow x(y-2) = 1+y \overset{y\neq 2}{\Leftrightarrow} x = \frac{1+y}{y-2}$$

La fonction réciproque f^{-1} de f est donc définie pour $y \in]2;+\infty[$ par $f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{y-2}$.

Ou encore $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$, pour $x \in]2;+\infty[$.