Fiche d'exercice sur les complexes n°1

Exercice 1 :

- Déterminer les formes algébriques des nombres complexes :

$z_1 = (1+3i)^2 \quad z_2 = (2-6i) - i(2-2i) \qquad z_3 = (2-6i) - 3(2-2i) \qquad z_4 = (2-i)(1-2i)$

$$z_5 = \frac{2}{2-i} \qquad z_6 = \frac{1+i}{1-3i}.$$

- Déterminer le conjugué des nombres complexes : $z_7 = -2i$; $z_8 = -i(3+3i)$.

Exercice 2 :

- Calculer $(z-2i)(z+2i)$.
- En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + 4 = 0$

Exercice 3 :

Déterminer le lieu des points M d'affixe z tq $Z = \dfrac{iz-1}{z-i}$ soit réel.

Exercice 4 :

- Montrer, grâce aux propriétés de la conjugaison que si un polynôme P à coefficient réels alors pour tout nombre complexe Z on a $P(\overline{Z}) = \overline{P(Z)}$..
- En déduire que si P est un polynome à coefficients réels qui admet un nombre complexe Z comme racine alors $\overline{Z}$ est aussi une racine de P.

Exercice 5 :

Soient A(2 ;3), B(1 ;1) et C(3 ;1). Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 6 : Cas particuliers importants. Donner modulo 2π les arguments :

- d'un réel strictement positif,
- d'un réel strictement négatif,
- d'un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement positive,
- d'un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement négative.

Exercice 7 :

- Comment choisir le nombre complexe z pour que $Z = z^3 + 2z - 3$ soit réel ? Soit E l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tq Z soit réel. Déterminer E.
- On considère les points A et B d'affixes respectives i et 1. Soit M un point du plan d'affixe z distinct de A. On pose $Z = \dfrac{1-z}{i-z}$. Déterminer l'ensemble E des points M tq Z soit réel. Déterminer l'ensemble F des points M tq Z soit imaginaire pur.

Exercice 8 : Soit z un nombre complexe différent de 1. On note M le point du plan complexe d'affixe z. On pose $Z = \dfrac{z+i}{z-1}$. Déterminer l'ensemble :

- E des points M tq Z soit réel
- F des points M tq $|Z| = 1$
- G des points M tq $\arg(Z) = \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi]$

Exercice 9 : Identité du parallélogramme

- Démontrer que pour tous nombres complexes Z et Z' on a :

$$|Z+Z'|^2+|Z-Z'|^2=2|Z|^2+2|Z'|^2$$

Indication : utiliser la relation $|Z|^2=Z\overline{Z}$.

- Interpréter géométriquement.

Exercice 10 : Carrés et parallélogramme.

ABC est un triangle de sens direct. DBA est un triangle isocèle rectangle en D de sens direct. ACE est un triangle isocèle rectangle en E de sens direct. On construit le point L tq $\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{DB}$.

- Faire une figure
- Démontrer que EDL est un triangle rectangle isocèle en E de sens direct.

Exercice 11 : En devoir Maison

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$; on prend comme unité graphique 2 cm.

1) a) Donner l'écriture algébrique du nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation iz – 2 = 4i – z. On donnera la solution sous forme algébrique.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2-6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)+13=0$

2) On désigne par I, A et B les points d'affixe respectives 1, 2i et 3 + i.

a) Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

b) Calculer l'affixe Z_C du point C image de A par la symétrie de centre I.

c) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$.

En déduire le module et un argument de ce nombre ; ainsi qu'une interprétation géométrique.

d) Soit D le point d'affixe Z_D telle que z_D-z_C = z_A-z_B, montrer que ABCD est un carré.

3) Pour tout point M du plan, on considère le vecteur $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MI}$

b) Montrer que le point K défini par $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}$ = 2 $\overrightarrow{AB}$ est le milieu du segment [AD].

c) Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tel que :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

Construire Γ.